Horst-Joachim Jaeck

Tensorfeldmodell für Prognosen der Standort- und Marktgebietsentwicklungen von Einkaufszentren[1].

1) Vgl. Jaeck, H.-J.: Marketing und Regional Science. Umrisse einer feldtheoretischen Raumkonzeption im Rahmen der Standorttheorie und der regionalen Absatzlehre für urbane Einzelhandelsagglomerationen, erscheint demnächst bei Duncker & Humblot, Berlin.

1. Zur Begründung einer ökonomischen Feldtheorie

Ein feldtheoretischer Forschungsansatz scheint auch für die wissenschaftliche Analyse ökonomischer Marktphänomene und betriebswirtschaftlicher Standortprobleme, wenn sie in einer weitergefaßten regionalen Sicht erfolgen, fruchtbar zu sein. Es ist sogar erstaunlich, daß der Feldbegriff in der ökonomischen Theorie bisher kaum eine Rolle gespielt hat, obwohl eine fast zwingende Analogie zwischen physikalischen Erscheinungen des Magnetismus oder der Elektrizität und ökonomischen Gesetzmäßigkeiten und Tendenzen von Marktregionen und Einkaufszentren besteht.

Die im Zusammenhang mit der Feldtheorie interessierenden Teilaspekte sind der räumliche und der zeitliche. Bei völliger raumzeitlicher Entfaltung der ökonomischen Marktbedingungen ergibt sich aber eine derartige Vielfalt und Verwicklung von beachtenswerten Tatbeständen, Problemen und Lösungsschwierigkeiten, daß sie erneut zu einer selektiven Sicht zwingt, die allerdings eine Verlagerung der Schwerpunkte verlangt, wenn sie die regional und temporal wesentlichen Umstände berücksichtigen will. Diese spezielle Form der Schauweise ist mit einem enormen Abstraktionsprozeß verbunden, der modellmäßig abbildend, von als unwesentlich vermuteten Phänomenen absieht, wenn er für Planungszwecke operable Konzepte liefern soll. Entgegen aber dem üblichen, von den geographischen und historischen Bedingtheiten abstrahierenden Verfahren, bedarf sie eines gedanklichen Raum-Zeit-Systems, das es erlaubt, wenn auch nicht in anschaulicher, so doch in einer formalistischen Form, die Zusammenhänge auf einer höheren Ebene der Synthese zu erkennen.

Die Betrachtung raum-zeitlicher Mannigfaltigkeiten wird auch deshalb kompliziert, weil beide kategorialen Teilbereiche durchaus unterschiedliche Strukturen besitzen und die Art ihrer Verknüpfung problematisch ist. Diese neue Konzeption also soll, da sie räumliche und zeitliche Zusammenhänge einbezieht, mit dem Attribut "feldtheoretisch" belegt werden. Damit wird ein Begriff angegeben, der bereits insbesondere von Sozialpsychologen und Soziologen, wenn auch unter anderen, nämlich mehr metaphorischen Aspekten - man verräumlichte prinzipiell unräumliche psychische und gesellschaftliche Strukturen und Prozesse mittels Analogien physikalischer Theoreme -, in die Sozialwissenschaften eingeführt ist. Außerdem ist neben dem Einwand der bloßen Verräumlichung auch noch der Tatbestand festzuhalten, daß die sozialwissenschaftliche Feldtheorie bisher kaum über eine statische Betrachtung hinausgekommen ist. Für eine dynamische Theorie fehlen noch die Grundlagen, zumal eine Verbindung regionaler und temporaler Aspekte kaum begonnen hat in der sozialwissenschaftlichen Literatur eine Rolle zu spielen. Man spricht zwar auch von statischen Feldern, wenn in gewissen Teilen des Raumes von Ort zu Ort veränderliche Größen vorkommen. Die Feldgröße solcher allein räumlich determinierter Felder stellt also eine Funktion des Ortes, die in Sonderfällen auch in eine Konstante ausarten kann, dar. Solche Felder spielen neuerdings auch in der theoretischen Wirtschaftsgeographie eine Rolle, und zwar spricht man von der theoretischen Ordnungsform der Zusammenfassung von Standorten gleichmäßig abgewandelter Sachverhalte[2].

2) Vgl. Bartels, D.: Einleitung, in: Derselbe (Hrsg.): Wirtschafts- und Sozialgeographie. Neue Wissenschaftliche Bibliothek 35, Wirtschaftswissenschaften, Köln und Berlin 1970, S. 18.

Horst-Joachim Jaeck

Tensorfeldmodell für Prognosen der Standort- und Marktgebietsentwicklungen von Einkaufszentren[1].

1) Vgl. Jaeck, H.-J.: Marketing und Regional Science. Umrisse einer feldtheoretischen Raumkonzeption im Rahmen der Standorttheorie und der regionalen Absatzlehre für urbane Einzelhandelsagglomerationen, erscheint demnächst bei Duncker & Humblot, Berlin.

1. Zur Begründung einer ökonomischen Feldtheorie

Ein feldtheoretischer Forschungsansatz scheint auch für die wissenschaftliche Analyse ökonomischer Marktphänomene und betriebswirtschaftlicher Standortprobleme, wenn sie in einer weitergefaßten regionalen Sicht erfolgen, fruchtbar zu sein. Es ist sogar erstaunlich, daß der Feldbegriff in der ökonomischen Theorie bisher kaum eine Rolle gespielt hat, obwohl eine fast zwingende Analogie zwischen physikalischen Erscheinungen des Magnetismus oder der Elektrizität und ökonomischen Gesetzmäßigkeiten und Tendenzen von Marktregionen und Einkaufszentren besteht.

Die im Zusammenhang mit der Feldtheorie interessierenden Teilaspekte sind der räumliche und der zeitliche. Bei völliger raumzeitlicher Entfaltung der ökonomischen Marktbedingungen ergibt sich aber eine derartige Vielfalt und Verwicklung von beachtenswerten Tatbeständen, Problemen und Lösungsschwierigkeiten, daß sie erneut zu einer selektiven Sicht zwingt, die allerdings eine Verlagerung der Schwerpunkte verlangt, wenn sie die regional und temporal wesentlichen Umstände berücksichtigen will. Diese spezielle Form der Schauweise ist mit einem enormen Abstraktionsprozeß verbunden, der modellmäßig abbildend, von als unwesentlich vermuteten Phänomenen absieht, wenn er für Planungszwecke operable Konzepte liefern soll. Entgegen aber dem üblichen, von den geographischen und historischen Bedingtheiten abstrahierenden Verfahren, bedarf sie eines gedanklichen Raum-Zeit-Systems, das es erlaubt, wenn auch nicht in anschaulicher, so doch in einer formalistischen Form, die Zusammenhänge auf einer höheren Ebene der Synthese zu erkennen.

Die Betrachtung raum-zeitlicher Mannigfaltigkeiten wird auch deshalb kompliziert, weil beide kategorialen Teilbereiche durchaus unterschiedliche Strukturen besitzen und die Art ihrer Verknüpfung problematisch ist. Diese neue Konzeption also soll, da sie räumliche und zeitliche Zusammenhänge einbezieht, mit dem Attribut "feldtheoretisch" belegt werden. Damit wird ein Begriff angegeben, der bereits insbesondere von Sozialpsychologen und Soziologen, wenn auch unter anderen, nämlich mehr metaphorischen Aspekten - man verräumlichte prinzipiell unräumliche psychische und gesellschaftliche Strukturen und Prozesse mittels Analogien physikalischer Theoreme -, in die Sozialwissenschaften eingeführt ist. Außerdem ist neben dem Einwand der bloßen Verräumlichung auch noch der Tatbestand festzuhalten, daß die sozialwissenschaftliche Feldtheorie bisher kaum über eine statische Betrachtung hinausgekommen ist. Für eine dynamische Theorie fehlen noch die Grundlagen, zumal eine Verbindung regionaler und temporaler Aspekte kaum begonnen hat in der sozialwissenschaftlichen Literatur eine Rolle zu spielen. Man spricht zwar auch von statischen Feldern, wenn in gewissen Teilen des Raumes von Ort zu Ort veränderliche Größen vorkommen. Die Feldgröße solcher allein räumlich determinierter Felder stellt also eine Funktion des Ortes, die in Sonderfällen auch in eine Konstante ausarten kann, dar. Solche Felder spielen neuerdings auch in der theoretischen Wirtschaftsgeographie eine Rolle, und zwar spricht man von der theoretischen Ordnungsform der Zusammenfassung von Standorten gleichmäßig abgewandelter Sachverhalte[2].

2) Vgl. Bartels, D.: Einleitung, in: Derselbe (Hrsg.): Wirtschafts- und Sozialgeographie. Neue Wissenschaftliche Bibliothek 35. Wirtschaftswissenschaften, Köln und Berlin 1970, S. 18.

Es soll jedoch hier an die ursprünglichere, z.B. auch in der Physik verwandte Konzeption Anschluß gesucht werden, die als Feld allgemein Raum-Zeit-Systeme versteht.

Die Feldgröße kann also auch neben räumlichen Parametern insbesondere von der Zeit abhängen. In der Physik werden viele derartige mit der Zeit veränderliche Felder diskutiert, die dann im Zusammenhang mit der räumlichen Kategorie die Phänomene der Bewegung in exakter Weise zu beschreiben erlauben.

Nach der Faraday-Maxwellschen Theorie spricht man von einem elektrischen Feld, in einem bestimmten Raumgebiet, wenn gewährleistet ist, daß eine kleine elektrische Probeladung e, wenn sie in einen beliebigen Punkt des Raumgebietes gebracht wird, dort einer bestimmten Kraft K ausgesetzt sei, m.a.W. in dem betreffenden Raumpunkt besteht die Feldstärke $E = K/e$.

Damit wurde die bis dahin geltende Auffassung, daß jede Kraftwirkung ohne die örtliche Vermittlung eines Zwischenmediums auftritt, fallen gelassen. Diese ältere Fernwirkungstheorie ging also davon aus, daß sich beispielsweise eine Veränderung der Ladung bei einer anderen Ladung im selben Augenblick durch eine veränderte Kraftwirkung bemerkbar macht, d.h. die Kraft breitet sich unendlich schnell im Raum aus, eine Annahme, die inzwischen im Gegensatz zu den experimentellen Erfahrungen steht. Nach den Aussagen der Relativitätstheorie vermögen sich jegliche Arten von Wirkungen allenfalls mit Lichtgeschwindigkeit auszubreiten. Damit wurde die universelle Geltung einer Naturkonstanten, eines absoluten Wirkrahmens, in die Theorie eingebaut. Demzufolge darf sich eine Änderung der Ladung bei einer anderen Ladung nur mit einer gewissen Verspätung, der sog. Retardierung, bemerkbar machen. Da eine Fernwirkungstheorie mit retardiert wirkenden Kräften enorme Schwierigkeiten zeigt - so wäre eine retardierte Energieübertragung während der Laufzeit der Kraftwirkung überhaupt nicht vorhanden und somit beispielsweise das Erhaltungsgesetz der Energie in Frage gestellt -, mußte sie fallen gelassen[3] und die von Faraday und Maxwell begründete Nahewirkungstheorie oder Feldtheorie entwickelt werden.

Für die Nahewirkungstheorie ist erkenntnistheoretisch der Feldbegriff die unentbehrliche Voraussetzung. Damit wird die Energie auch in den Raum zwischen den Ladungen verlegt; wo also eine elektrische Feldstärke vorhanden ist, besteht auch eine gewisse kontinuierlich verteilte Energie[4].

Man wird, um die gesamte Energie eines Feldes berechnen zu können, jedem Volumenelement des Raumes, in dem ein elektrisches Feld herrscht, einen bestimmten Energiegehalt geben müssen. Die an einem bestimmten Ort wirkende Kraft, die von der Ladung an einem anderen Ort ausgeht, be-

---

3) Vgl. Macke, W.: Elektromagnetische Felder. Ein Lehrbuch der Theoretischen Physik, 3. Aufl., Leipzig 1965, S. 18.
4) Vgl. Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik, 12. unveränderter Nachdruck der 11. Aufl., Frankfurt/Main 1959, S. 269.

steht dann aus zwei Faktoren, deren einer eine Eigenschaft des Raumes am Ort der Krafteinwirkung und deren anderer, nämlich die Ladung dieses Ortes, eine Eigenschaft des Objektes ist, auf das die Kraft wirkt. Ist die Zerlegung der Kraft auch zunächst formaler Natur, so läßt sie sich aber auch im Sinne der Nahewirkungstheorie einer Deutung unterziehen. Als Analogie kann dazu eine Gummimembrane betrachtet werden, die an einer Stelle eingedrückt wird. Die hierdurch hervorgerufene Störung verformt die Membrane auch an anderen Stellen, nicht nur an der direkten Einwirkung, indem Zug-, Druck- und Schubwirkungen auftreten, die infinitesimal von Ortspunkt zu Ortspunkt wirken[5].

Ähnlich wie die elektrischen Felder werden auch die magnetischen Felder in der Physik mit einem umfangreichen mathematischen Formel-Apparat behandelt. Zu den Kraftfeldern zählen noch die Gravitationsfelder, die erst im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Nahewirkungstheorie beschrieben werden konnten[6]. Trotz der enormen Fortschritte, die mittels der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie erzielt werden konnten, bleiben noch Probleme für eine physikalisch einheitliche Feldtheorie zu lösen[7]. Ein Wandel in der Feldauffassung ergab sich mit der Entwicklung der Quantenfeldtheorie, wodurch man dem Ziel, das Feld zum generellen Grundbegriff der Physik zu machen, wesentlich näherrückte[8].

In der Psychologie wurde der Feldbegriff von dem Gestaltpsychologen M. Wertheimer (1912) im Zusammenhang mit der Deutung des S-Phänomens beim Bewegungssehen adoptiert und von W. Köhler durch seine Isomorphie-Hypothese spezifiziert, wonach dem Wahrnehmungsfeld ein physikalisches Kraftfeld entspreche, durch das eine analoge Erregungsverteilung in der Hirnrinde erzeugt werde[9].

Diese zunächst für den Bereich der Wahrnehmungspsychologie geltende Feldtheorie wurde dann zu einem sensorisch-tonischen Ökosystem weiterentwickelt, in dem die Rezeption der Sinnesdaten im Wahrnehmungsfeld nicht nur zur Erkenntnis der Außenwelt, sondern darüberhinaus zum Überleben des Organismus in seiner Umwelt dient. Die Umweltreize als Störgrößen lösen im Organismus Prozesse zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes mit der Umwelt in Form eines Regelkreissystems[10] aus.

---

5) Vgl. Macke, W.: Elektromagnetische Felder, a.a.O., S. 19 f.
6) Vgl. Brockhaus Enzyklopädie, 17. Aufl., Bd. 6, Wiesbaden 1968, S. 123.
7) Vgl. z.B. hierzu Laue, M. von: Die Relativitätstheorie, 2. Bd., Die allgemeine Relativitätstheorie, 5. Aufl., hrsg. von F. Beck, Braunschweig 1965, S. 192.
8) Vgl. Heisenberg, W.: Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Stuttgart 1967.
9) Vgl. Brockhaus Enzyklopädie, 17. Aufl., Bd. 6, Wiesbaden 1968, S. 123; siehe dazu auch Mey, H.: Studien zur Anwendung des Feldbegriffs in den Sozialwissenschaften, Studien zur Soziologie, hrsg. von R. Dahrendorf, Bd. 5, München 1965, S. 27 ff.
10) Vgl. ibid.

"Die aus der Tradition der Berliner Gestaltspsychologie (Köhler, Koffka und Wertheimer) hervorgegangene persönliche Schöpfung K. Lewins (Principles of topological psychology, New York 1936; Resolving social conflicts, New York 1948; Field theory in social science, New York 1951) bezeichnet sich als eine Feldtheorie des Verhaltens"[11]. Diese Feldtheorie bedient sich dabei lt. Thomae physikalischer Bilder und Analogien zur Darstellung psychologischer Zusammenhänge[12]. Gegen diese auch von anderen Psychologen vorgetragene Stellungnahme wendet sich Lewin mit dem Hinweis, daß die Benutzung von Raumbegriffen in der Psychologie keinen "Physikalismus" bedeute, sondern allenfalls eine Mathematisierung[13]. Neben dieser, durch eine Vielzahl kritischer und antikritischer Äußerungen bis heute nicht beendeten Kontroverse, ist aber insbesondere auch auf den Umstand zu verweisen, daß die Frage, welche Rolle der Raum eigentlich in der sozialpsychologischen Feldtheorie spielt, ob er beispielsweise lediglich als formalistisch verwandtes Analogon oder auch als ökologisch-phänomenale Bedeutung besitzend aufgefaßt wird, noch nicht genügend geklärt ist.

Lewin übernahm die Modellvorstellung des Feldes zur Deskription und Analyse sozialpsychologischer Phänomene, befreite sie aber von dem "Anhängsel der Neurophysiologie"[14]. Das Feld als "Lebensraum" schließt die Personen mit ein. Umwelt und Person bilden ein dynamisches System, in der die jeweils situationsbedingten Kräfte wie beispielsweise Bedürfnisse, Valenzen, Tabus, Attitüden, Barrieren, Bewegungsspielräume oder Anspruchsniveaus untersucht werden[15]. Die einzelnen Phänomene werden als topologische Regionen formalisiert und verräumlichen auf diese Weise Situationen. Die Spannungen im Feld werden durch Vektoren repräsentiert, die zu psychischen Bewegungen, "Lokomotionen", führen können. "Lewin unterscheidet in der Topologischen Psychologie quasi-physikalische, quasi-soziale und quasi-begriffliche (d.s. geistige) 'Lokomotionen'"[16]. - Damit sind auch schon einige Probleme und Methoden der psychologischen Feldtheorie angerissen, die Lewin und seine Schüler in zahlreichen Abhandlungen entwickelten und die hier nur exemplarisch vorgestellt werden können[17]. Von

---

11) Vgl. Hofstätter, P.R.: Sozialpsychologie, Sammlung Göschen, Bd. 104/104a, 2. Aufl., Berlin 1964, S. 44.
12) Vgl. Thomae, H.: Psychologie, in: HDSW, Bd. 8, S. 642 f.
13) Vgl. Lewin, K.: Grundzüge der topologischen Psychologie, übertragen und hrsg. von R. Falk et al., Berlin-Stuttgart-Wien 1969, S. 75 f.
14) Mey, H.: Studien zur Anwendung des Feldbegriffs in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 30.
15) Vgl. Lohr, W.: Einführung zur deutschsprachigen Ausgabe, in: K. Lewin: Feldtheorie in den Sozialwissenschaften. Ausgewählte theoretische Schriften, hrsg. von D. Cartwright, ins Deutsche übertragen von A. Lang und W. Lohr, Bern und Stuttgart 1963, S. 28 ff.
16) Falk, R. und F. Winnefeld: Vorwort, in: K. Lewin: Grundzüge der topologischen Psychologie, übertragen und hrsg. von R. Falk und F. Winnefeld, Bern und Stuttgart 1969, S. 15.
17) Überblicke finden sich beispielsweise bei Solle, R.: Der feldtheoretische Ansatz, in: Sozialpsychologie, 1. Halbband: Theorien und Methoden, hrsg. von C.F. Graumann, Bd. 7, des Handbuchs der Psychologie, hrsg. von K. Gottschaldt et al., Göttingen 1969, S. 139 ff.; Deutsch, M.: Field Theory, in: International Encyclopedia of the Social

den neueren Entwicklungen ist noch besonders das von Bernt Spiegel entwickelte psychologische Marktmodell[18] diskutiert worden.

In den traditionellen Gravitations-, Potential- und Interaktionsmodellen der sozialen Physik wird die Region bzw. der Standort als ein Gefäß aufgefaßt, das eine bestimmte Masse von unregelmäßig verteilten Elementen enthält, deren Interaktionen durch die Massenverteilung in Zusammenhang mit spezifischen Distanzfunktionen beeinflußt werden[19]. Damit steht die Feldauffassung dieser Modelle in direkter Analogie zu derjenigen der Newton'schen Gravitationstheorie. Und zwar werden hier in gleicher Weise wie das "physikalisch Reale" in der klassischen Feldtheorie die sozialökonomischen Tatbestände mit einer dualistischen Eigenschaft belegt, so daß sie als aus

(1) Raum und Zeit und
(2) beweglichen Masseteilchen

zusammengesetzt aufgefaßt werden. D.h., wenn die 2., ontologische Eigenschaft verschwände, würde die 1. als "eine Art Bühne" für sozio-ökonomische Ereignisse allein übrig bleiben. Dabei fungiert der Feldbegriff allenfalls als Hilfsbegriff in Fällen, in denen man aus Vereinfachungsgründen die diskrete Materie als Kontinuum behandelt[20], das jederzeit

---

Sciences, hrsg. von David L. Sills et al., o.O. (New York), 1968, Bd. 5, S. 406 ff.
18) Vgl. Spiegel, B.: Die Struktur der Meinungsverteilung im sozialen Feld. Das psychologische Marktmodell, Enzyklopädie der Psychologie in Einzeldarstellungen, hrsg. von R. Heiß, Bd. 6, Bern - Stuttgart 1961.
19) Vgl. dazu die Auffassung von W. Isard und D.F. Bramhall in Isard, W. et al.: Methods of Regional Analysis: an Introduction to Regional Science, the Regional Science Studies Series, Bd. 4, Cambridge, Mass., und London 1960, S. 494.
20) Vgl. Einstein, A.: Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, 20. Aufl., Sammlung Vieweg, Heft 38, Braunschweig 1965, S. 92 - In der Newton'schen Mechanik und der speziellen Relativitätstheorie gilt die a priori-Existenz des leeren Raumes neben der Materie bzw. dem Feld. Während aber der klassische Feldbegriff als mechanisch interpretierbarer Zustand die Anwesenheit von Materie voraussetzt, wurde mit der speziellen Relativitätstheorie Einstein's die Emanzipation der Feldauffassung von einem materiellen Träger möglich. Es wurde ein Feldbegriff eingeführt, der auch in Abwesenheit ponderabler Materie im Vakuum als existent galt. Zum anderen ist die auch in der klassischen Mechanik geltende vierdimensionale Mannigfaltigkeit nicht mehr durch einen "Zerfall" in die eindimensionale Zeit und dreidimensionale räumliche Schnitte, der für alle Inertialsysteme derselbe ist, charakterisiert. Vielmehr werden in der speziellen Relativitätstheorie Raum und Zeit als unauflösbares vierdimensionales Kontinuum verstanden, dessen Metrik allein durch Lichtsignale definiert ist (Vgl. ibid., S. 93 ff.). "So entsteht eine vollständige und eindeutige Lichtgeometrie" (Reichenbach, H.: Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre, Die Wissenschaft, Sammlung von Einzeldarstellungen aus allen Gebieten der Naturwis-

bei genauerer Analyse durch Disaggregation auf punkthafte Masseelemente reduzierbar ist.

Eine weitere Eigenschaft der sozio-ökonomischen Gravitationsmodelle besteht insbesondere darin, daß sie die Zeitkategorie außer Acht lassen. Dies stellt auch Gunnar Olsson anläßlich der Tatsache fest, daß Gravitations- und Potentialmodelle nur die einfachsten Interrelationen enthalten[21].

Die frühesten Formulierungen über die Vorstellung, daß die Summe der Interaktionen zwischen zwei Gebieten oder Städten direkt proportional zu der Zahl der Menschen ist, die in diesen Räumen wohnen, und umgekehrt proportional zur Distanz zwischen den Städten oder Gebieten, wurden nach Olsson von Henry Charles Carey (1858)[22] vorgenommen[23]. Als nächster wird Albert E.F. Schäffle[24] angeführt: "Schäffle (1878) suggested the outline of a gravity model. According to this, industries develop chiefly in or near larger towns which, as markets, attract industry in direct proportion to the square of the distances between them:

$$M_{ij} = p_i p_j \, (d_{ij})^{-2} \text{ "[25]}$$

Später benutzen sowohl Ernest George Ravenstein (1885, 1889)[26] als auch E.C. Young (1924)[27] dieselben Ideen in ihren Migrationsstudien,

---

senschaft, hrsg. von W. Westphal und H. Rotta, Bd. 72, Braunschweig 1924, Nachdruck 1965, S. 10). Unabhängig von der neuartigen Feldkonzeption als einer selbständigen Begriffsbildung gegenüber der Materie wird, wie schon bemerkt, auch in der speziellen Relativitätstheorie der Inertialraum zusammen mit der zugehörigen Zeit als "Gefäß" der Materie und des Feldes als a priori existierend vorausgesetzt. Erst in der allgemeinen Relativitätstheorie hat der Raum als "Gefäß" gegenüber dem "Raum-Erfüllenden" (Materie, Feld) keine Sonderexistenz mehr. Demnach gibt es beispielsweise in der allgemeinen Relativitätstheorie keinen leeren Raum, d.h. einen Raum ohne Feld (vgl. Einstein, A.: Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, a.a.O., S. 100).

21) Vgl. Olsson, G.: Distance and Human Interaction, a Review and Bibliography, Bibliography Series, Nr. 2, Philadelphia, Pennsylvania 1965, S. 43.
22) Carey, H.C.: Principles of Social Science, Philadelphia 1858.
23) Vgl. Olsson, G.: Distance and Human Interaction, a.a.O., S. 44.
24) Schäffle, A.E.F.: Bau und Leben des sozialen Körpers, 3. Bd., Tübingen 1878.
25) Hamilton, F.E.: Models of Industrial Location, in: Models in Geography, hrsg. von R.J. Chorley und P. Haggett, London 1967, S. 369.
26) Ravenstein, E.G.: The Laws of Migration, in: Journal of the Royal Statistical Society, Bd. 48, 1885, S. 167 ff.; derselbe: The Laws of Migration, in: Journal of the Royal Statistical Society, Bd. 52, 1889, S. 241 ff.
27) Young, E.C.: The Movement of Farm Population, Ithaca, New York 1924.

während James H.S. Bossard (1932)[28] seine soziologischen Untersuchungen über die Wahl des Ehepartners gravitationstheoretisch formulierte[29]. Die weitere Literatur über dieses Gebiet nimmt dann bald einen derartigen Umfang an, daß sie kaum noch zu überblicken ist[30]. Die allgemeine Verfolgung dieser Literaturgattung ist aber für die Zwecke unserer Untersuchung nicht erforderlich, da schon früh William J. Reilly das Gravitationsmodell in der regionalen Handelsforschung anwandte (1929, 1931)[31] und damit eine spezielle Forschungsrichtung begründete.

In Abänderung des Newton'schen Gesetzes[32] lautet die von Reilly aufgestellte Beziehung:

> Die Anziehungskraft zweier Handelszentren in den Städten A und B auf die Bevölkerung eines zwischen ihnen gelegenen Siedlungsgebietes C verhält sich ungefähr im direkten Verhältnis zur Bevölkerung der Städte A und B und im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat ihrer Entfernungen von der Siedlung C[33].

Diese von Reilly behauptete und von ihm an mehreren Beispielen demonstrierte Gesetzmäßigkeit wurde vielfach modifiziert[34]. Besonders einleuchtend waren die Substitutionen "Bevölkerungszahl" durch "Quadratmeter Verkaufsfläche für 'shopping goods' " und "Entfernung" durch

---

28) Bossard, J.H.S.: Residential Propinquity as a Factor in Marriage Selection, in: American Journal of Sociology, Bd. 38, 1932, S. 219 ff.
29) Vgl. Olsson, G.: Distance and Human Interaction, a.a.O., S. 44.
30) Übersichten finden sich bei Carrothers, G.A.P.: An Historical Review of the Gravity and Potential Concepts of Human Interaction, in: Journal of the American Institute of Planners, Bd. 22, 1956, S. 94 ff.; Isard et al.: Methods of Regional Analysis: an Introduction to Regional Science, a.a.O., S. 493 ff.; Olsson, G.: Distance and Human Interaction, a.a.O., S. 43 ff.
31) Reilly, W.J.: Methods for the Study of Retail Relationships, Bulletin Nr. 2944, University of Texas 1929; derselbe: The Law of Retail Gravitation, New York 1931.
32) "Zwischen zwei Massen m_1 und m_2 wirkt eine Anziehungskraft, die dem Produkt beider Massen proportional und ihrem Entfernungsquadrat umgekehrt proportional ist" (Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik, 12. Aufl., Frankfurt (Main) 1959, S. 83).
33) Gasser, T.P.: Das Shopping Center in Nordamerika. Einkaufszentren in Europa, Schriftenreihe der Forschungsstelle für den Handel an der Handelshochschule St. Gallen, Bd. 2, Bern 1960, S. 45.
34) Vgl. z.B. Converse, P.D.: A Study of Retail Trade Areas in East Central Illinois, Urbana 1943; Douglas, E.: Measuring the General Retail Trading Area - A Case Study, in: Journal of Marketing, Bd. 13, Nr. 4, April 1949 und Bd. 14, Nr. 1, Juli 1949; Jung, A.F.: Is Reilly's Law of Retail Gravitation Always True?, in: Journal of Marketing, Bd. 24, Nr. 2, Oktober 1959 - Einen Überblick gibt Schwartz, G.: Laws of Retail Gravitation: An Appraisal, in: Business Review, Bd. 22, Nr. 1, Oktober 1962, S. 53 ff.

"Autofahrzeit"[35]. Zum anderen erfuhr der Formelapparat eine wichtige Ergänzung durch P. D. Converse[36], die zur Bestimmung der Punkte gleicher Anziehungskraft dient. Sie ist bekannt unter dem Begriff "breaking point formula".

Ein Beweis für die Ableitung von Converse's Formel aus Reilly's Gleichung findet sich bei David L. Huff[37]. Schließlich wurden durch zahlreiche Verifikationen mittels empirischer Analysen andere Exponenten nachgewiesen[38] und insbesondere Gravitationskonstanten eingeführt[39].

R. L. Nelson entwickelte u. a. für die "localization economies" für Handelsbetriebe eine "Rule of Retail Compatibility"[40].

Eine wesentliche Verbesserung stellt demgegenüber das von David L. Huff entwickelte Modell dar. Und zwar bestimmt sich nach seinen Überlegungen die Absatzreichweite der Einkaufszentren durch die schon erwähnte Verkaufsfläche des Einzelhandels und die Fahrtzeit vom Wohnort der Konsumenten zum Absatzzentrum[41]. Eine weitere wichtige Variante seines

---

35) Vgl. Gasser, T. P.: Das Shopping Center in Nordamerika .... a. a. O., S. 46.
36) Converse, P. D.: New Laws of Retail Gravitation, in: Journal of Marketing, Bd. 14, 1949, S. 379 ff.
37) Vgl. Huff, D. L.: Defining and Estimating a Trading Area, in: Journal of Marketing, Bd. 28, Juli 1964, S. 34 ff.
38) So stellte u. a. Iklé fest, daß der Exponent der Reilly'schen Formel keineswegs immer 2 beträgt, sondern zwischen 0, 689 und 2, 57 schwankt. (Vgl. Iklé, F. C.: Sociological relationship of traffic to population and distance, in: Traffic Quarterly, April 1954, S. 123 ff.).
39) Vgl. Isard, W. et al.: Methods of Regional Analysis ...., a. a. O., S. 495 ff.; Mäcke, P. A.: Das Prognoseverfahren in der Straßenverkehrsplanung, Wiesbaden - Berlin 1964; derselbe: Prognosemodell zur Quantifizierung des Verkehrsaufkommens aufgrund von Strukturdaten, in: Seminarberichte der Gesellschaft für Regionalforschung, Deutschsprachige Gruppe der Regional Science Association, Heft 3, Dezember 1969, S. 81 ff.; Steiner, A.: Interregionale Verkehrsprognosen, Beiträge aus dem Institut für Verkehrswissenschaft an der Universität Münster, hrsg. von H. St. Seidenfus, Heft 41, Göttingen 1966, S. 113 ff.; derselbe: Verkehrsprognosen - Probleme und Methoden, in: Seminarberichte der Gesellschaft für Regionalforschung, Deutschsprachige Gruppe der Regional Science Association, Heft 5, Dezember 1969, S. 98 ff.
40) Vgl. Nelson, R. L.: The Selection of Retail Locations, New York 1958, S. 66 f.
41) Vgl. Huff, D. L.: A Topographical Model of Consumer Space Preferences, in: Papers and Proceedings of the Regional Science Association, Bd. 6, 1960, S. 159 ff.; derselbe: Ecological Characteristics of Consumer Behavior, in: Papers and Proceedings of the Regional Science Association, Bd. 7, 1961, S. 19 ff.; derselbe: A Note on the Limitations of Intraurban Gravity Models, in: Land Economics, Februar 1962, S. 64 ff.; derselbe: A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas, in: Land Economics, Bd.

Modells stellt der probabilistische Ansatz zur Beschreibung des Einkaufsverhaltens der Konsumenten dar.

Ein etwas anderer Modellansatz geht von der physikalischen Analogie der Bestimmung des mechanischen Schwerpunktes einer mit Massen bewichteten Fläche aus und will den Kaufkraftschwerpunkt bestimmen. Dabei hat allerdings die dafür zu entwickelnde Distanzfunktion eine andere Wirkung als in der Mechanik[42].

Damit ist die Ausgangslage für die Anwendung eines Modells geschaffen, das, unter Berücksichtigung einer bestimmten Entfernungsfunktion, einen Punkt auf der Karte auszeichnet, bei dem die Summe der auf ihn einwirkenden Kaufkraftgewichte maximal ist und das von Pfaffenberger und Wiegert entwickelt wurde[43]. Dieses Modell ist nicht geeignet für den Fall, wenn die Konkurrenz gleichzeitig einen Standort in demselben Marktgebiet sucht. Für diesen Fall wurde insbesondere die Theorie der Spiele angewandt[44].

In der Operations Research-Literatur wird u. a. seit längerem eine Lösung für die Standortwahl zweier Warenhäuser als Zweipersonen-Nullsummen-Spiel diskutiert[45].

39, 1963, S. 81 ff.; derselbe: Probabilistic Analysis of Consumer Spatial Behavior, in: Proceedings of the Winter Conference of the American Marketing Association, California 1963, S. 443 ff.; derselbe: Determination of Intra-Urban Retail Trade Areas, California 1963; derselbe: Defining and Estimating a Trading Area, in: Journal of Marketing, Bd. 28, Juli 1964, S. 54 ff.; derselbe; Jenks, G. P.: A Graphic Interpretation of the Friction of Distance in Gravity Models, Paper, Kansas 1967; derselbe, R. Gambini und G. F. Jenks: Geometric Properties of Market Areas, in: Regional Science Association, Papers, Bd. 20, 1968, S. 85 ff.
42) Kassbaum, A.: Kaufkraftpunkte, in: Der Städtetag, Zeitschrift für kommunale Praxis und Wissenschaft, 14. Jahrg., Heft 12, Dezember 1961, S. 656.
43) Vgl. Pfaffenberger, U. und R. Wiegert: Zur Bestimmung des optimalen Standortes eines Einkaufszentrums, in: Unternehmensforschung, Bd. 9, Heft 2, 1965, S. 121.
44) Das strategische Modell dient der Lösung von Konfliktsituationen in Form eines Gleichgewichtszustandes. Vor derartigen Aufgaben sieht sich ein in einem liberalistischen Wirtschaftssystem tätiges Einkaufszentrum in ständiger und mannigfacher Weise gestellt. Formal beruht das Modell auf dem Min-Max-Theorem von John von Neumann (: über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brower'schen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Bd. 8, 1937, S. 73 ff.). Es geht dabei um die Bestimmung des sog. Sattelpunktes einer Bilinearform. (Vgl. auch Neumann, J. von und O. Morgenstern: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, aus dem Amerikanischen übersetzt von M. Leppig) hrsg. von F. Sommer, 2. Aufl., Würzburg 1967, S. 156).
45) Vgl. Kemeny, J. G. et al.: Mathematik für die Wirtschaftspraxis, aus dem Amerikanischen übersetzt von H.-J. Zimmermann, Berlin 1966, S. 440; Henn, R.: Strategische Spiele und unternehmerische Entschei-

Ähnlich formulierten K. Fischer und R. Gunzenhäuser ein Problem zur Bestimmung des optimalen Standortes einer Kaufhausfiliale unter Verwendung der Spieltheorie und der linearen Programmierung[46].

2. Problembeschreibung für das Modell

Es sollen die sozio-ökonomischen Spannungsverhältnisse im Marktfeld, hervorgerufen durch ungünstige Kaufkrafttendenzen[47] in bezug auf die Lokalisationen von Shopping Centers analysiert werden. Dabei wird die Einbeziehung der Zeit als zusätzliche unabhängige Größe im sozio-ökonomischen Modell-Raum gefordert und als möglicher Weg der Formalisierung die Tensorrechnung angeführt[48].

3. Aufbau des Modellraumes und feldtheoretische Formalismen

3.1. Definition des sozio-ökonomischen Umweltraumes

Bei der Konstruktion des sozio-ökonomischen Modell-Raumes wird zunächst die Hypothese aufgestellt, daß der zu betrachtende "geographische Teil" des Raumes als ein Gebiet G der Ebene, also des zweidimensionalen Zahlenraumes $\mathbb{R}^2$ anzusehen ist. Damit ist eine Dimension des anschaulichen dreidimensionalen Raumes vernachlässigt. Das Vorgehen ist plausibel und entspricht etwa der Prozedur, mit der man in der Meteorologie die Temperatur auf Meereshöhe normiert[49]. Dabei wird vorausgesetzt, daß G - im Sinne der Topologie - eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist,

---

dungen, in: ZfB, 28. Jahrg., 1958, S. 277 ff.; derselbe: Verfahren des Operations Research und ihre Anwendung in der Wirtschaft, in: Operations Research Verfahren, hrsg. von demselben, Bd. 1, Meisenheim/Glan 1963, S. 12 f.; Kromphardt, W., Henn, R., Förstner, K.: Lineare Entscheidungsmodelle, Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft, hrsg. von W. Kunkel et al., Abteilung Staatswissenschaft, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962, S. 120; Angermann, A.: Industrielle Planungsrechnung, 1. Bd.: Entscheidungsmodelle, Frankfurt (Main) 1963, S. 310 ff.; Henn, R. und Künzi, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung II, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 39, Berlin - Heidelberg - New York 1968, S. 76f.

46) Vgl. Fischer, K. und R. Gunzenhäuser: Zur Bestimmung des günstigsten Standortes einer Betriebsfiliale, in: Unternehmensforschung, Bd. 7, Jahrg. 7, 1963, S. 131 ff.

47) Zum Begriff der Kaufkraft vgl. Jaeck, H.-J.: Regionalanalyse im Raum Göttingen, in: Gesellschaft für Regionalforschung. Deutschsprachige Gruppe der Regional Science Association (Hrsg.): Seminarberichte, Heft 2, Clausthal-Zellerfeld, Januar 1969, S. 46 f.

48) Damit wird der Anregung einer programmatischen Note von K. Dziewonski (: A New Approach to Theory and Empirical Analysis of Location, in: Regional Science Association: Papers, Bd. 16, S. 17-25) gefolgt.

49) Vgl. Dziewonski, K.: a.a.O., S. 18.

d.h. es wird gefordert, daß der anschauliche Rand von G nicht mehr zu G gezählt wird. Das hat den Sinn, daß in G ohne weitere mengentheoretische Überlegungen Differentialrechnung betrieben werden kann[50]. Regional phänomenologisch kann für die Außerachtlassung der Grenze des ökologischen Systems "Umwelt" argumentiert werden, daß die Begrenzung nicht als eigenständige, die Umweltfaktoren wieder beeinflussende Erscheinung spürbar oder bewußt wird, da sie ex definitione gerade so verläuft, daß sie den benötigten Spielraum für die Erfüllung der Interessen des betreffenden Lebensbereichs nicht durchschneidet. Man kann also schreiben:

$$(1) \qquad G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Neben G wird der "dynamische Teil" des Modell-Raumes durch die Vorgabe eines Zeitintervalles Z eingeführt; und zwar als offene, zusammenhängende Teilmenge des eindimensionalen Zahlenraumes $\mathbb{R}$, d.h. der Zahlengeraden, in der Form

$$(2) \qquad Z = \left\{ t \in \mathbb{R} : t_0 < t < t_1 \right\} ,$$

wobei t_0 den Anfangs- und t_1 den Endpunkt des Zeitraumes darstellen, aus denselben wie bei der Definition von G angeführten Begründungen aber nicht mehr zu Z gezählt werden.

Das kartesische Produkt der beiden Teilmengen G und Z stellt dann den sozio-ökonomischen Umweltraum E dar:

$$(3) \qquad E = G \times Z = \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G,\ t \in Z \right\}.$$

Anschaulich handelt es sich bei dieser Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ um einen dreidimensionalen Körper mit der Grundfläche G und der imaginären Höhe Z, d.h. das Gebiet G "wandert" im zeitlichen Verlauf parallel zur t-Achse. Damit können die sozio-ökonomischen Ereignisse räumlich und zeitlich fixiert werden. Es führt jedoch zu Widersprüchen, wenn auch die Kräfte und Tendenzen innerhalb dieses Modell-Raumes E quantitativ beschrieben werden, die eine Größe veranlassen, eine bestimmte räumlich-zeitliche Position einzunehmen. Der Anregung K. Dziewonskis folgend, sollen diese sozio-ökonomischen Wirkungen durch Tensorfelder repräsentiert werden. Damit wird jedoch eine entscheidende Erweiterung des bisher konstruierten Modellraumes notwendig.

3.2. Definition des sozio-ökonomischen Kraftfeldes

Die Konstruktion des Umweltraumes E dient lediglich zur formalen Darstellung von Bahnen beschreibenden Bewegungen irgendwelcher Punkte (z.B. Konsumenten) in der Marktregion. Dabei sind die geographischen Koordinaten bei Objekten mit festem Standort (z.B. Shopping Center) unveränderlich und lediglich im Wert der zeitlichen Koordinate variabel.

---

50) Dieses Vorgehen ist in der mathematischen Literatur als "Randwertproblem in der Differentialrechnung" diskutiert worden.

T. Hägerstrand hat in einem anderen Zusammenhang den Begriff des "Lebenspfades" geprägt[51], der diese Bahnen sinnvoll benennt.

Ein neuerliches Problem stellt die quantitative Erfassung der Kräfte und Tendenzen, die gewissermaßen hinter den sozio-ökonomischen Situationen und Bewegungen stehen, dar. Diese latenten Strukturen und Prozesse können als Orientierungsintensitäten der Kaufkraft in bezug auf environmentale Gravitation verschiedener Einkaufszentren interpretiert werden.

Es ist nun unmittelbar einsichtig, daß die vektorielle Formalisierung von Feldkräften durchaus nicht hinsichtlich Richtung und Intensität mit den die ausgelösten Bewegungen repräsentierenden Vektoren identisch sind, noch überhaupt sinnvoll im Umweltraum E darstellbar sind, da beispielsweise E als Teilraum des $\mathbb{R}^3$ durchaus nicht in seiner angenommenen Größe für die Darstellungskräfte ausreichend sein muß. So kann etwa ein Kraftvektor aufgrund seiner Stärke, die durch die Länge des Vektors abgebildet ist, über die Grenzen von E gänzlich hinausreichen. Auch handelt es sich phänomenologisch bei der Analyse von Feldkräften gänzlich um andere Objekte als Bewegungen.

Der Spannungs- oder Orientierungsvektor muß vielmehr als Element eines neuen dreidimensionalen Raumes aufgefaßt werden, falls die ökonomischen Wirkungsgrößen als mathematisch faßbare Objekte in einem dynamischen Modell gedeutet werden sollen. Durch diesen formalen Schachzug befreit man sich jedenfalls aus dem Dilemma, das die mannigfaltigen Widersprüche, die sich aus der gleichwertigen Behandlung unterschiedlicher Phänomene im selben Raum ergeben, mit sich bringen. Da es also zu Mehrdeutigkeiten führt, einem in einem bestimmten Punkte e des Umweltraumes E berechneten Spannungsvektor v im Umweltraum E Bedeutung zuzumessen, muß v in Abhängigkeit von e gänzlich von E getrennt werden, was dadurch geschieht, daß Elementenpaare (e, v) eingeführt werden. Das bedeutet, daß ein neuer Raum, und zwar das sozio-ökonomische Kraftfeld V, in dem die verschiedenen Kräfte, die auf die einzelnen Objekte des Umweltraumes E einwirken, abgebildet werden, eingeführt wird. Die Struktur dieses Raumes V ist wie E aus einer zweidimensionalen Fläche G' und einem eindimensionalen dynamischen Teil Z' bestehend, also:

(4) $$G' = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(5) $$Z' = \left\{ \bar{t} \in \mathbb{R} : \bar{t}_0 < \bar{t} < \bar{t}_1 \right\}$$

Es handelt sich also wieder um einen $\mathbb{R}^3$, d.h. der Zeitintervall Z' wird mit der Teilfläche G' durch das kartesische Produkt zum sozio-ökonomischen Kraftfeld V in der Form

51) "The concept of a life-path (or parts of it such as the day-path, week path, etc.) can easily be shown graphically if we agree to collapse three-dimensional space into a two-dimensional plane or even a one-dimensional island, and use perpendicular direction to represent time." (Hägerstrand, T.: What about People in Regional Science?, in: Regional Science Association, Papers, Bd. 24, 1970, S. 10).

(6) $$V = G' \times Z' = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^3 : (\bar{x}, \bar{y}) \in G';\ \bar{t} \in Z' \right\}$$

gebildet.

Anschaulich handelt es sich bei dieser Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wieder um einen dreidimensionalen Körper mit der Grundfläche G' und der imaginären Höhe Z'.

3.3. Definition der Marktregion

Damit sind zunächst zwei separate Modell-Räume für die für unsere Überlegungen zum Zwecke der Regionalanalyse und Standortpolitik von Einkaufszentren so charakteristischen Größen konstruiert; und zwar einmal für die Standortsituationen und Transportprozesse von Kaufkraft und Waren und zum anderen für die verschiedenen, hinter diesen stehenden Kräften und Tendenzen, die zunächst zu Spannungen führen und dann Bewegungen auslösen können. Als Verbindung beider Teilräume wird das kartesische Produkt von E und V gewählt und die dadurch aufgespannte Hyperebene mit Marktregion M benannt:

(7) $$M = E \times V = G \times Z \times G' \times Z'.$$

Während der sozio-ökonomische Umweltraum E bzw. das sozio-ökonomische Kraftfeld V für sich betrachtet noch anschaulich als Teilmenge eines dreidimensionalen Raumes gedeutet werden konnte, ist dies im Falle des feldtheoretischen Konstruktum M nicht mehr möglich, da dieser Raum als sechsdimensionales, dualistisches Gebilde über die Anschauung hinausgeht. Obwohl unanschaulich, so ist doch die Marktregion M in ihren Strukturgesetzlichkeiten formalistisch faßbar. Eine ungefähre Vorstellung gewinnt man, wenn sowohl E als auch V als eindimensionale Gebilde vereinfacht werden; dann ist M ein zur $\mathbb{R}^3$-Achse von V parallel verlaufender Streifen in der Ebene mit Querschnitt E. Abgesehen von den unbefriedigend bleibenden Veranschaulichungsversuchen, ist es aber von grundlegender Bedeutung für die folgenden Überlegungen, daß dieser Modell-Raum M eine algebraische Struktur trägt. Für jeden Punkt e des Umweltraumes E ist die Teilmenge $\{v\} \in \mathbb{R}^3$ des Konstruktums M ein strukturell mit $\mathbb{R}^3$ identischer Vektorraum, so daß die Vorstellung von M als einem "Vektorraumbündel" mit der "Faser" V nahegelegt wird. Die Wirkungen in E werden dann durch algebraische Operationen in den Fasern V des Vektorraumbündels M repräsentiert.

3.4. Feldvorstellung und ökonomische Wirkungsgeschwindigkeit

Neben den bisher angeführten formalistischen Begründungen für die entwickelte Raumstruktur für das Modell müssen noch einige problembezogene Überlegungen angeführt werden, da operative Vorteile nicht allein ausreichend sein dürften, in derart konsequenter Form in höhere Dimensionen zu gehen. Die modelltheoretische Prozedur wird vielmehr erst durch die Vorstellung begründet, wie die ökonomischen Wechselwirkungen in dem Modell zu repräsentieren sind. Es wird nämlich die Auffassung vertreten, daß diese Wirkungen durch Kraftfelder charakterisiert werden können. Dabei wird aber der Feldbegriff lediglich als Hilfskonstruktion zur Beschreibung der sich wechselseitig beeinflussenden Marktfaktoren ähnlich wie in der Feldtheorie der klassischen Mechanik eingeführt. "Anstatt nämlich zu sagen, daß ein bestimmtes Teilchen auf ein anderes wirkt, stellt man sich vor, daß es ein Feld um sich herum erzeugt"[52].

Normalerweise folgen die Auswirkungen den Ursachen erst nach Ablauf einer bestimmten Zeitspanne, d.h. die sozio-ökonomische Wirkungsgeschwindigkeit ist endlich. Es soll jedoch von der Annahme ausgegangen werden, daß sich die ökonomischen Feldkräfte unendlich schnell ausbreiten. Damit wird von einer relativistischen Behandlung der Zeit Abstand genommen, da sie für das Modell nicht als sinnvoll erachtet wird und die Analyse ökonomischer Wechselwirkungen in Form einer Nahwirkungstheorie kaum zu universellen Gleichungen führen dürfte wie in der Einstein'schen Relativitätstheorie.

3.5. Theorie der mathematischen Felder

Allgemein wird der Feldbegriff für Bereiche gebraucht, in denen eine Größe als Funktion von Raum und Zeit dargestellt ist. Je nach Art der veränderlichen Größe kann man formal zwischen Skalar-, Vektor- und Tensorfeldern verschiedener Stufen unterscheiden. Sind in dem betreffenden Teilraum mehrere Feldgrößen vorhanden, ist der Bereich entsprechend von mehreren Feldern beherrscht, die untereinander wieder in den verschiedensten Wechselwirkungen stehen können. Dabei sind skalare Zahlen, denen man im Raum Punkte, Vektoren Zahlen und dazugehörige Richtungen, denen man im Raum Strecken, und Tensoren Abbildungen, denen man im Raum die von einer Ecke eines Parallelepipedes ausgehenden Kanten zuordnen kann[53]. Man kann einen Tensor auch als eine multilineare Funktion von Richtungen[54] interpretieren.

Der allgemeine Rahmen dieser mathematischen Begriffe ist die Differentialgeometrie, die n-dimensionale differenzierbare reelle Mannigfaltigkeiten, d.h. derartige topologische Räume, die lokal, d.h. in geeigneten Umgebungen eines jeden Punktes, wie ein offener Teil eines n-dimensionalen euklidischen Raumes aussehen, untersucht. In der Flächentheorie, als Teil der Differentialgeometrie, werden die Tangentialebene, die Krümmung in einem Flächenpunkt und bestimmte Kurven auf der Fläche, wie Krümmungslinien, geodätische Linien usw. berechnet. Dabei ist das begleitende orthonormierte Dreibein ein wichtiges Hilfsmittel, das durch die drei in einem Flächenpunkt aufgehängten, zueinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren in Richtung der Tangenten an

---

52) Landau, L.D. und E.M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, hrsg. von G. Heber, Bd. 2: Klassische Feldtheorie, aus dem Russischen übersetzt von G. Dautcourt, 4. Aufl., Berlin 1967, S. 46.

53) Vgl. Duschek, A. und A. Hochreiner: Tensorrechnung in analytischer Darstellung, I. Tensoralgebra, 4. Aufl., Wien 1960, S. 14.

54) Vgl. Dziewonski, K.: a.a.O., S. 18.

die Kurven geeigneter Parameter und der senkrecht auf der Fläche stehenden Flächennormalen gebildet wird (vgl. Abb. 1).

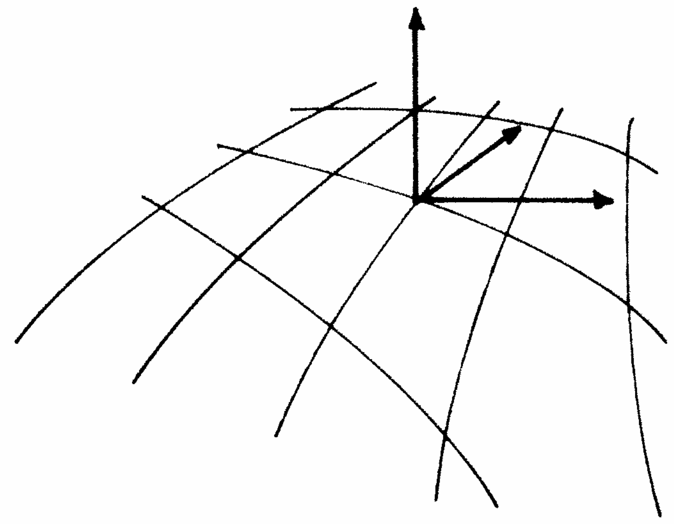

Abb. 1: Parameterkurven und begleitendes Dreibein einer Fläche

Im allgemeinen ist auch die durch $E = G \times Z$ gebildete drei-dimensionale Mannigfaltigkeit nicht mehr als Teilmenge des drei-dimensionalen euklidischen Raumes anzusehen, sondern nur lokal zu realisieren. Das Konstruktum $M = E \times V$ wurde als Vereinigung aller Fasern

$$T_e = \{e\} \times V \tag{8}$$

definiert, wobei T_e als Tangentialraum, d.h. als Raum aller Tangentialvektoren beschrieben ist. Berücksichtigt man, daß der Tangentialraum $T_e(E)$ von E in e genau durch die drei partiellen Ableitungen nach x, y und t im Punkte e aufgespannt wird, so ist leicht bei Identifikation von

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_e \quad \text{mit } (e, 1, 0, 0), \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_e \quad \text{mit } (e, 0, 1, 0) \quad \text{und} \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_e \quad \text{mit } (e, 0, 0, 1) \tag{11}$$

die Übereinstimmung von T_e mit $T_e(E)$ einzusehen.

Die Bündelung aller Fasern T_e zum Modell-Raum M ist mit dem Vorgang identisch, aus den Tangentialräumen $T_e(E)$ das "Tangentialbündel" T(E) herzustellen; T(E) erweist sich als eine sechs-dimensionale Mannigfaltigkeit, in diesem Sinne ist also auch die Marktregion M sechs-dimensional. Tensorfelder werden dann mit Hilfe des Tangentialbündels T(E) erklärt[55]. Im allgemeinen differentialgeometrischen Fall wird also die Verwendung von globalen Koordinaten im Umweltraum E, wie sie durch x, y und t im besprochenen ebenen Fall gegeben werden, in der Regel unmöglich: man hat nur lokale Koordinaten zur Verfügung.

Betrachtet man wieder die Situation des gefaserten Konstruktums M, so kann M als die Kollektion der Vektorräume $T_e = \{e\} \times V$ aufgefaßt werden, wenn e den Umweltraum E durchläuft. Für jeden Vektorraum T_e und jedes Paar von nicht-negativen ganzen Zahlen (p, q) ist dann der Raum p-ko-q-kontra Tensoren definiert, der

(12) $$T_e^{p,q}$$

genannt wird. Unter einem p-ko-q-kontra Tensorfeld auf dem Umweltraum E wird dann eine Menge

(13) $$\theta = \left\{\theta_e : e \in E\right\}$$

von Tensoren

(14) $$\theta_e \in T_e^{p,q}$$

verstanden. Man erhält also ein Tensorfeld θ durch Bestimmung der Tensoren θ_e für jedes $e \in E$. Da T_e für jeden Punkt e des Umweltraumes E ein drei-dimensionaler Vektorraum ist, ist $T^{p,q}$ für den Fall $p + q > 0$ stets $3(p + q)$-dimensional, was strukturell mit $\mathbb{R}^{3(p+q)}$ übereinstimmt. Mutatis mutandis läßt sich dann ein Tensorfeld als eine Kurve in einem gefaserten Raum interpretieren.

3.6. Dualistischer Standpunkt der Tensorrechnung

Mit dem rein formal entwickelten Feldbegriff sind zugleich konkrete Vorstellungen zu verbinden, und zwar ist dabei vornehmlich an Kraftfelder analog dem Newton'schen Gravitationsfeld zu denken, das bekanntlich in der Regionalforschung von größerer Bedeutung ist. Dabei werden Kräfte in der Regel durch Vektoren und Kraftfelder durch Vektor- bzw. Tensorfelder repräsentiert. Es gibt zwar noch andere Felder, aber die Klassifikation der Felder soll hier lediglich unter dem Gesichtspunkt ihrer ökonomischen Bedeutung innerhalb des Modells erfolgen.

Zunächst sind Felder im Konstruktum M anzuführen, worunter Graphen von Abbildungen $v : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ verstanden werden sollen, d.h. Mengen der Form

(15) $$\left\{[e, v(e)] : e \in E\right\} \in M.$$

Felder dieser Art - Orientierungs- oder Bewegungsfelder - haben ihre

55) Vgl. Hicks, N.J.: Notes on Differential Geometry, Van Nostrand Mathematical Studies, hrsg. von P.R. Halmos und F.W. Gehring, Toronto - New York - London 1965, S. 49 ff.

spezielle Form unter Einwirkung von Kraftfeldern angenommen, d.h. formal, daß Kraftfelder lineare Funktionen von Bewegungsfeldern oder 1-kovariante Tensorfelder über dem Umweltraum E darstellen. Damit sind die beiden unterschiedlichen Typen von Feldern des Modells auch schon genannt:

(a) Orientierungs- bzw. Bewegungsfelder und
(b) Kraftfelder.

Damit sind die strukturellen Voraussetzungen der Linearität des Kraftfeldes und der Bestimmung, daß die Kraft in jedem Punkt durch einen Vektor in einem bestimmten drei-dimensionalen Raum zu repräsentieren ist, verbunden.

Offensichtlich steht das Problem der sinnvollen Repräsentation des Kraftfeldes in enger Verbindung mit der Frage, wie der Prozeß der Wechselwirkungen von Bewegungs- und Kraftfeld zu formalisieren ist. Dabei sind zwei Aspekte zu beachten:

(1) Ein Kraftfeld induziert ein bestimmtes Bewegungsfeld. Dieser Wirkung folgt eine Rückwirkung, insofern als das Bewegungsfeld wieder das Kraftfeld beeinflußt, und zwar jetzt als abstraktes Kraftfeld fungierend. Setzt man diesen Gedanken fort, kommt man zu einer ganzen Kette von Rückwirkungsfeldern.

(2) Diesem Prozeß der fortwährenden gegenseitigen Beeinflussung haftet eine spezielle Dualität an. Bei Idealisierung dieser Wechselwirkungen ist man geneigt, von zwei Operationen zu sprechen, und zwar von Ursache und Wirkung. In einem funktionalen Zusammenhang kann jeder induzierte Vorgang unter diesem zweiseitigen Aspekt gesehen werden, d.h., daß eine Rückwirkung selbst Ursache oder Wirkung in einem zyklischen System sein kann.

Unter Berücksichtigung der Hypothese der Linearität der Wirkungen wird man auf den beschriebenen Ansatz für das Kraftfeld geführt. In jedem Punkt $e \in E$ gilt dann: Auf einem Bewegungsvektor (e, v) des vorgegebenen Feldes operiert die Kraft, die als ein 1-ko-Tensor θ_e eines Tensorfeldes θ interpretiert wurde. θ ist also Element des Raumes $T_e^{1,0}$, der seinerseits per definitionem mit dem Dualraum T_e^* des Vektorraumes T_e identisch ist.

Vermöge der Definition

(16) $$\Phi_{(e,v)}(\varphi) := \varphi((e, v))$$

ist jedem Element $(e, v) \in T_e$ ein Element $\Phi_{(e,v)}$ des Raumes der linearen Abbildungen auf T_e^* zugeordnet, folglich operiert der Vektor (e, v) auf dem Raum, dem der Tensor θ_e entnommen ist. Dieses ist genau der Dualraum von T_e^*, d.h. der Raum der 1-kontravarianten Tensoren auf T_e. Der damit gekennzeichnete dualistische Standpunkt der Tensorrechnung ist als Analogie für das vermutete ökonomische Phänomen, daß ökonomische Kraft und Bewegung zueinander dual, d.h. im Rahmen der tensoriellen Modellvorstellung Elemente dualer Räume sind, bedeutungsvoll. Ihre Wechselwirkungen, d.h. Rückwirkungen werden also durch den formalen Prozeß des Überganges zum Bidualen in das System von Kraft und Bewegung einbezogen. Dieses System ist somit selbst dualistisch, d.h. zyklisch mit der Periode 2.

4. Konstrukta des Modells und deren regional-ökonomische Interpretation

4.1. Vorbemerkungen

Die komplizierten Tendenzen einer regionalen Marktentwicklung zwingen zu einer Einschränkung der Analyse auf einige wenige, empirisch als wesentlich erkannter Phänomene, d.h. es werden ausschließlich mögliche oder wahrscheinliche Fälle untersucht. Diese Tatsache der grundsätzlichen Unbestimmtheit oder Unschärfe wird durch Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Prinzipien formal aufgehoben. Deshalb erfahren mehrere Größen des Modells eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation[56].

Für die Analyse regionalökonomischer Spannungsverhältnisse, das eigentliche Anliegen der Untersuchung, werden alle spannungserzeugenden Phänomene und Tendenzen einheitlich schematisiert und als Verlustgrößen im Absatzkalkül der Shopping Center-Promoter charakterisiert, nämlich durch das Maß, in dem sie den Zustand vom normalen oder optimalen entfernen. Spannung ist demnach eine relative, subjektive Größe. Der modellgebundene Normzustand ist dabei als Zustand völliger Stabilität[57] charakterisiert und hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Zustand des räumlichen Gleichgewichts.

4.2. Shopping Valenz

Im geographischen Teil G der Marktregion M seien n konkurrierende Shopping Centers[58] $U_1, \dots, n$ gegeben, wobei sich der Standort $(x^{(j)}, y^{(j)})$

---

56) Damit wird sich an die Konstruktion von D.L. Huff angelehnt. (Vgl. etwa Huff, D.L.: A Topographical Model of Consumer Space Preferences, in: Papers and Proceedings of the Regional Science Association, Bd. 6 (1960), S. 159 ff.

57) Dziewonski unterscheidet vier Stadien standortlicher Stabilität:
(1) Zustand völliger Stabilität,
(2) Zustand beeinträchtigter oder partieller Stabilität,
(3) Zustand schwindender Stabilität,
(4) Zustand der Mobilität
(Vgl. Dziewonski, K.: a.a.O., S. 21).

58) "Das Shopping Center ist eine gegründete Ladenstadt, die als einheitlicher Anlagenkomplex unter zentraler Leitung entwickelt und verwaltet wird und durch Vermietung der einzelnen Ladenlokale an ausgewählte Einzelhandels- und sonstige Dienstleistungsbetriebe ein auf den Konsumentenbedarf der Absatzregion abgestimmtes Angebot von

des Zentrums U_j $(j = 1, \dots, n)$ in dem betrachteten Zeitintervall Z nicht ändert. Jedem Zentrum U_j wird eine Funktion

$$(17) \qquad A_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

(bzw. ein (0,0)-Tensorfeld auf M) zugeordnet, die die "Shopping Valenz" des Zentrums kennzeichnen soll. Dabei werden zwei grundlegende Phänomene berücksichtigt, und zwar:

(a) die Attraktivität a_j des Zentrums U_j. Unter der Attraktivität

$$(18) \qquad a_j : Z \longrightarrow \mathbb{R}$$

eines Zentrums ist eine zeitabhängige Größe zu verstehen, die die Anziehungskraft auf mit Kaufkraft ausgestattete Konsumenten, die environmentale Gravitation, beschreibt und anhand von Indikatoren, wie beispielsweise die Verkaufsfläche, charakterisiert werden kann[59].

(b) Die dem Zentrum U_j assoziierte Distanzfunktion a_j^*. Mit a_j^* wird diejenige Funktion bezeichnet, die die Friktion der Distanz zwischen einem beliebigen Punkt in G und dem betrachteten Zentrum U_j in Abhängigkeit von der Zeit in bezug auf die Attraktivität a_j des Zentrums U_j beschreibt. Dabei besteht die Distanzfunktion a_j^* wiederum aus zwei Größen, und zwar:

(i) der Metrik, nach der der Abstand zweier Punkte in G gemessen wird, also die Funktion

$$(19) \qquad d_{j,t} : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

(ii) dem Effekt, den die Entfernung eines Punktes vom Zentrum U_j - gemessen mit Hilfe von d_{ij} - ausübt, d.h. die Funktion

$$(20) \qquad e_{j,t} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Damit ist die Distanzfunktion a_j^* durch folgende Gleichung definiert:

$$(21) \qquad a_j^*(x,y,t) = e_{j,t}\left\{d_{j,t}\left[(x,y),\ (x^{(j)}, y^{(j)})\right]\right\}.$$

Waren und Dienstleistungen bereitstellt und gewöhnlich mit für den Motorisierungsgrad der Kunden hinreichenden Parkplatzanlagen ausgestattet ist." (Jaeck, H.-J.: Das Shopping Center, erscheint demnächst).

59) Eine Prognose des Geschäftsflächenbedarfs in der Göttinger Innenstadt aufgrund einer Regionalanalyse der Kaufkraftflüsse in Südniedersachsen hat der Verfasser unter der Leitung von Herrn Professor Dr. E. Leitherer durchgeführt. Die dabei angewandten Methoden der Markt- und empirischen Sozialforschung sind beschrieben in: Jaeck, H.-J.: Regionalanalyse im Raum Göttingen, a.a.O.

Unter der Shopping Valenz des Zentrums U_j wird dann das Produkt aus Attraktivität und Distanzfunktion verstanden. Demnach gilt folgende Definitionsgleichung:

(22) $$A_j(x, y, t) = a_j(t) \cdot a_j^*(x, y, t).$$

Dabei wird unterstellt, daß die Effektfunktion monoton fällt, wodurch gewährleistet ist, daß die Shopping Valenz mit wachsender Entfernung vom Zentrum abnimmt.

4.3. Attraktivität, Distanzmetrik und Effektfunktion

Die Attraktivitäten der Einkaufszentren zu einem festen Zeitpunkt t lassen sich anschaulich je nach Bedeutung als verschieden große Strecken orthogonal zur geographischen Ebene E abtragen. Wird die zeitliche Entwicklung der Attraktivität eines Zentrums U_j veranschaulicht, sind die Graphen der Funktion a_j nach der Zeitachse zu bilden. Bei statischer Betrachtung glaubt man mit konstanten Funktionen auskommen zu können. Nur dieser Fall ist bisher in der Literatur betrachtet worden. Bei raumzeitlicher Analyse des Phänomens können die Attraktivitäten nicht als zeitlich konstant angenommen werden, zumal bei der Untersuchung spannungserzeugender Tendenzen.

Die lediglich der Veranschaulichung dienenden Angaben über die Momentaufnahme der Attraktivitäten mehrerer Zentren in G und die Zeitraumbetrachtung der Attraktivität eines Zentrums U_j dürfen nicht mit den Überlegungen über die sinnvolle Formalkonstruktion eines Modellraumes verwechselt werden. Dabei wird eine gesonderte Dimension für den Wert einzelner Positionen im Raum-Zeit-Kontinuum nicht erforderlich, da hierfür die Zahlenangaben genügen. Wenn zur Veranschaulichung des Phänomens der divergierenden Attraktivitäten der verschiedenen Einkaufszentren eine zusätzliche Dimension zur Verräumlichung der Attraktivitätswerte vorübergehend eingeführt wurde (- eine konsequente Fortsetzung des Gedankens würde schließlich zu einem acht-dimensionalen Raum führen -), so hat dies doch keine weiteren Folgen für unsere Modellkonstruktion.

Die Metriken lassen sich in zwei Gruppen unterteilen, und zwar

(a) schematisierte Metriken und
(b) reale Metriken.

Die schematisierten Metriken werden mittels einer Norm N auf dem zwei-dimensionalen euklidischen Raum definiert und anschließend wird durch

(23) $$D(p_1, p_2) = N(p_1 - p_2)$$

der Abstand der beliebigen Punkte p_1 und p_2 festgelegt. Die drei wesentlichsten Fälle der schematisierten Metrik sind m.E. die

(a_1) euklidische Metrik,
(a_2) Maximum-Metrik und
(a_3) Summen-Metrik.

Die euklidische Metrik ist folgendermaßen definiert: Sei $p = (x \cdot y)$ ein Punkt des Raumes $\mathbb{R}^2$, so ist

(24) $$N(p) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die euklidische Norm, d.h. die anschauliche Länge des durch p bestimmten Vektors in der Ebene, die nach dem Satz des Pythagoras berechnet wird. Für zwei Punkte p_1 und p_2 bildet dann

(25) $$D(p_1, p_2) = \| p_1 - p_2 \|$$

den euklidischen Abstand dieser Punkte. Bei festem Radius r liegt die Menge der Punkte, die von einem Punkt p die Entfernung r haben, genau auf der Kreislinie um p mit Radius r. Diese Metrik spielt also "Luftlinien-Entfernung" eine große Rolle.

Die Maximum-Metrik ist wie folgt definiert: Die Norm eines Punktes p der Ebene sei durch das Maximum der Beträge der Koordinaten festgelegt; ist also p(x, y) die Darstellung von p in $\mathbb{R}^2$, so sei

(26) $$N(p) = \max(|x|, |y|).$$

Der Maximumsabstand für zwei Punkte p_1 und p_2 stimmt mit dem größeren Achsenabschnitt des Vektors $p_1 - p_2$ überein. Anstelle des Kreises bei der euklidischen Metrik ist dann bei der Maximum-Metrik ein achsenparalleles Quadrat zu setzen. Diese Metrik verwendete beispielsweise M. Beckmann[60].

Zur Definition der Summen-Metrik wird zunächst die Norm des Punktes $p = (x, y)$ des 2-dimensionalen euklidischen Raumes durch

(27) $$N(p) = |x| + |y|$$

festgelegt. Im Gegensatz zur Maximum-Metrik ist es hier ein Quadrat, dessen Ecken durch die Koordinatenachsen laufen. Diese Metrik verwendeten beispielsweise Gambini, Huff und Jenks[61].

Im Gegensatz zu den schematisierten Metriken sind die realen Metriken nicht durch eine modellmäßige Darstellung begründet, sondern richten sich nach gewissen realen Gegebenheiten aus. Als Beispiele seien die

(b_1) reale Längen-Metrik,
(b_2) Zeit-Metrik und
(b_3) Geld-Metrik

diskutiert.

Die reale Längen-Metrik dient zur Messung der Entfernung zweier Punkte

---

60) Beckmann, M.: Location Theory, New York 1968, S. 74.
61) Gambini, R., Huff, D.L. und Jenks, G.F.: Geometric Properties of Market Areas, in: Regional Science Association, Papers, Bd. 20, 1968, S. 89 ff.

voneinander unter Berücksichtigung der realen Straßenstrecken eines Verkehrsnetzes an. Dieser Entfernungsbegriff wird insbesondere in der großräumigen Verkehrsforschung angewandt. Die realen Metriken sind aber für die modellmäßige Behandlung insofern mit Schwierigkeiten verbunden, als sie in der Regel nicht symmetrisch sind. Wesentlich sind bei festem Zentrum U_j nicht die Metrik $d_{j,t}$ sondern vielmehr nur die Werte

(28) $$d_{j,t}\left[(x,y),\ (x^{(j)},y^{(j)})\right]$$

d.h. der Abstand zum Zentrum U_j. Durch eine nachträgliche Idealisierung der durch unregelmäßige Grenzverläufe bestimmten Teilräume im Sinne einer flächen- oder distanzgetreuen Abbildung läßt aber vernünftige Ausgangssituationen für Modellbildungen erreichen.

Die Zeit-Metrik mißt die Entfernung in Zeiteinheiten und erlaubt, neben den Straßenverhältnissen weitere verkehrstechnische Gegebenheiten (z.B. Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs) zu berücksichtigen. Dieser Ansatz findet sich in der Literatur relativ häufig.

Die Geld-Metrik charakterisiert den Abstand zweier Punkte durch die Transportkosten. Auch dieser Ansatz findet sich in der Literatur häufig und wird insbesondere bei ökonomischen Standortmodellen zugrunde gelegt.

Bei den Effektfunktionen finden sich in der Literatur zwei typische Ansätze:

(a) Die Friktion der Distanz wird als Beeinträchtigung der Anziehungskraft eines Zentrums analog dem Newton'schen Gravitationsgesetz aufgefaßt;

(b) als Effektfunktionen werden alle monotonen Funktionen $e_{j,t} : [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e(o) = 1$ und $e(r) = 0$ für alle hinreichend großen r zugelassen.

4.4. Zentrumsorientierten Kaufkraftfelder

Die für die theoretische Analyse des Konsumentenverhaltens wichtigste Größe im Rahmen des Modells ist die bedarfsspezifische Kaufkraft, d.h. diejenige Geldmenge der Konsumenten, die sie aufgrund ihrer finanziellen Möglichkeiten, ihrer Bedürfnisstruktur und sonstiger marktwirksamer Faktoren für den Kauf von Waren und Dienstleistungen auszugeben in der Lage sind.

Bei der absoluten Höhe der Kaufkraft, die durch statistische Erhebungen feststellbar ist, handelt es sich um eine Funktion

(29) $$K : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

die in einem Punkt (x,y,t) die - absolut genommene - Kaufkraft $K(x,y,t)$ angibt. Mit dem Wert $K(x,y,t)$ der Kaufkraftfunktion K an der Stelle (x,y,t) des Umweltraumes E ist folglich nur eine "lokale" Aussage gemacht. In der Regel können punktuell eindeutige und genau den Einzel-

fall in all seinen räumlichen und zeitlichen Auswirkungen widerspiegelnde Informationen nicht erreicht werden. Diesen Tatbestand muß auch das Modell berücksichtigen, wenn es operational sein soll. Insofern ist es erforderlich, für den Teilbereich der Kaufkraftanalyse bewußt angelegte Unschärfen in das Modell einzubauen. Hierfür besteht die Möglichkeit, mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Formulierungen zu brauchbaren Aussagen zu gelangen. Damit sind jedoch keineswegs Ungenauigkeiten im Sinne fehlerhafter Strukturelemente in das Modell aufgenommen.

Es werden also folgende Wahrscheinlichkeiten angenommen: $p_j(x,y,t)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Konsument momentan am Ort (x,y,t) des Umweltraumes E im Zentrum U_j einkaufen würde, falls er den Betrag $K(x,y,t)$ auszugeben hätte. Dabei sei vorausgesetzt, daß man über alle Zentren vergleichbare Informationen besitzt. Diese Hypothese über vollständige Information der Konsumenten innerhalb ihrer näheren Umwelt ist m.E. sinnvoller als eine subjektive Schätzfehler eröffnende Einbeziehung von Verhaltensweisen aufgrund unvollkommener Marktinformationen.

Da dem Konsumenten unserem Modell gemäß keine weiteren Alternativen als $U_1,\ldots,U_n$ zur Verfügung stehen (Versandhandelskäufe seien also eliminiert), gilt:

(30) $$\sum_{j=1}^{n} p_j(x,y,t) = 1 .$$

In Modellen, die keine Zeitvariable enthalten, sind natürlich die Wahrscheinlichkeiten $p_j(x,y,t)$ als zeitunabhängig vorausgesetzt, d.h. die Funktionen

(31) $$t \longrightarrow p_j(x,y,t)$$

sind bei festem $(x,y) \in G$ konstant.

Mit Hilfe der Funktion K und p_j werden für $j = 1,\ldots,n$ die Funktionen $K_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt; es wird definiert:

(32) $$K_j(x,y,t) := K(x,y,t) \cdot p_j(x,y,t).$$

Dies bedeutet, daß vom Betrag $K(x,y,t)$ wahrscheinlich der Teil $K_j(x,y,t)$ in U_j ausgegeben wird.

Mit den Skalaren $K_1(x,y,t),\ \ldots,\ K_n(x,y,t)$ werden bestimmte Vektoren des Marktraumes M in Verbindung gebracht. Es wird definiert:

(33) $$v^{(j)}(x,y,t) = K_j(x,y,t) \cdot \langle (x^{(j)},y^{(j)},t) - (x,y,t) \rangle \ ;$$

es sei $\left[(x,y,t),\ v^{(j)}(x,y,t)\right]$ der zu $K_j(x,y,t)$ gehörige Vektor.

Ist v ein von o verschiedener Vektor des drei-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, ist $\langle v \rangle$ der Einheitsvektor in Richtung v. Zur Bestimmung von $v^{(j)}(x,y,t)$ ist der Einheitsvektor in Richtung von $(x^{(j)},y^{(j)},t)-(x,y,t)$ zu bilden. Nun gilt

(34) $$(x^{(j)}, y^{(j)}, t)-(x, y, t) = (x^{(j)}-x,\ y^{(j)}-y,\ t-t) = (x^{(j)}-x,\ y^{(j)}-y,\ 0) = (x^{(j)},\ y^{(j)}, 0)-(x, y, 0).$$

Die Vektoren können also in der x-y-Ebene dargestellt werden; und zwar weist der Vektor von $(x, y, 0)$ nach $(x^{(j)}, y^{(j)}, 0)$. Das gilt auch für die anderen, zur x-y-Ebene parallelen, durch t verlaufenden Ebenen, d.h. also, durch jenen Vektor wird die Richtung von (x, y) nach U_j im geographischen Teil G des Modellraumes gekennzeichnet. $v^{(j)}(x, y, t)$ stellt dann die Kaufkraft $K_j(x, y, t)$ als Vektor mit der Richtung von (x, y, t) nach $(x^{(j)}, y^{(j)}, t)$ dar. Das durch $v^{(j)}$ bestimmte Vektorfeld

(35) $$\left\{\left[(x, y, t),\ v^{(j)}(x, y, t)\right] : (x, y, t) \in M\right\}$$

heißt das U_j-orientierte Kaufkraftfeld auf dem Marktraum M.

4.5. Kaufkrafttendenzen

Die Darstellung der Kaufkraft durch Vektoren ist zwar anschaulich interpretierbar (sie sind aufgrund der durch die in G gelegenen Einkaufszentren induzierten Orientierungen und der speziellen Bedeutung ihrer Länge plausibel motiviert), aber wichtiger ist die mit der Konstruktion verbundene spezielle algebraische Struktur als sinnvolle Formalisierung gewisser konkreter Vorgänge. Nur wenn diese Möglichkeit besteht, ist die gewählte vektorielle Darstellung der Kaufkraft geeignet. Addiert man beispielsweise zwei zentrumsorientierte Kaufkraftvektoren, so kann dies zu einem resultierenden abstrakten Kaufkraftvektor führen, der nicht mehr so anschaulich wie bisher interpretiert werden kann. Wenn nun trotzdem an der vektoriellen Darstellung der Kaufkraft festgehalten wird, so sind die erwarteten Vorteile der adäquaten Formalisierung ausschlaggebend.

Sei $v = (v_1, v_2, 0)$ ein beliebiger Vektor der durch $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ bestimmten Ebene und (x, y, t) ein Punkt des Umweltraumes E. Der Punkt $[(x, y, t), v]$ des Modellraumes M wird als Kaufkraft interpretiert, bzw. es soll festgestellt werden, welche Kaufkraft durch v in (x, y, t) gegeben ist. Sind mehr als zwei Zentren in G lokalisiert, stellt der Vektor v keine universelle Größe dar. Das bedeutet, daß für $n > 2$ dem Vektor v keine für alle Zentren gleichermaßen gültige Wertgröße zugeschrieben werden kann; v wird vielmehr aus der Perspektive eines jeden Zentrums U_j gedeutet und ist somit eine relative Größe. v wird nämlich für jedes j eine zu definierende Kaufkraft - gemessen durch eine spezielle Norm - auf U_j und die Konkurrenz von U_j aufteilen. Die einzelnen Komponenten werden durch die Richtung des Vektors v gegeben.

Die Konkurrenz des Zentrums U_j wird folgendermaßen formalisiert:
Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

(36) $$k^{(j)}(x, y, t) := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} v^{(i)}(x, y, t);$$

das durch die Abbildung

(37) $$k^{(j)}: (x, y, t) \longrightarrow k^{(j)}(x, y, t)$$

festgelegte Orientierungsfeld

(38) $$\left\{\left[(x, y, t), k^{(j)}(x, y, t)\right] : (x, y, t) \in M\right\}$$

heißt das <u>konkurrenz-orientierte Kaufkraftfeld bezüglich U_j</u>.

Dabei wird vorausgesetzt, daß (x, y, t) ein derartiger Punkt des Umweltraumes E ist, in dem die Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ linear unabhängig sind, d.h. die beiden Vektoren sind vom Nullvektor verschieden und die durch sie jeweils festgelegten Geraden sind nicht mehr identisch, können also als Achsen eines Koordinatensystems in der v_1-v_2-Ebene dienen. Damit kann der beliebig vorgegebene Vektor v in Zentrums- und Konkurrenzkomponente zerlegt werden.

Um diese Zerlegung in quantitativ sinnvoller Weise durchzuführen, wird der folgende mathematische Satz formuliert:

<u>Satz I:</u> Seien $v^{o} = (v_1^{o}, v_2^{o})$ und $v^{*} = (v_1^{*}, v_2^{*})$ linear unabhängige Vektoren des zwei-dimensionalen euklidischen Raumes; ferner seien $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es genau ein Skalarprodukt β auf dem $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften[62]:

(i) $(v^{o}, v^{*}) = 0$,

(ii) $(v^{o}, v^{o}) = \alpha_1^2$,

(iii) $(v^{*}, v^{*}) = \alpha_2^2$.

Unter einem Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ versteht man eine bilineare Abbildung[63] $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) β ist symmetrisch, d.h. $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$.
(b) β ist positiv definit, d.h. $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$.

Auf die Bedeutung des Satzes für das Modell wird noch näher eingegangen; zunächst soll ein Beweis angegeben werden.

<u>Beweis des Satzes I:</u>

Um herauszufinden, welches Aussehen die Abbildung β besitzen muß, wird vorausgesetzt, es wäre bereits ein β mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

---

62) Das bedeutet: $\beta(v^{(1)} + v^{(2)}, w) = \beta(v^{(1)}, w) + \beta(v^{(2)}, w)$;
$\beta(\alpha v, w) = \alpha\beta(v, w)$; $\beta(v, w^{(1)} + w^{(2)}) = \beta(v, w^{(1)}) + \beta(v, w^{(2)})$;
$\beta(v, \alpha w) = \alpha\beta(v, w)$. Dabei seien v und w stets Elemente des $\mathbb{R}^2$.

63) Vgl. <u>Kowalsky, H.-J.</u>: Lineare Algebra, 4. Aufl., Berlin 1969, S. 115 ff.

Da β eine bilineare Abbildung ist, muß sie in folgender Weise darstellbar sein:

((1)) $$\beta(v,w) = \lambda_1 v_1 w_1 + \lambda_2 v_2 w_2 + \lambda_3 v_1 w_2 + \lambda_4 v_2 w_1 ;$$

dabei sind λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 reelle Zahlen, die auszurechnen sind. Nach Voraussetzung ist β ein Skalarprodukt, muß also symmetrisch sein (vgl. Eigenschaft a); wegen

$$\beta(w,v) = \lambda_1 w_1 v_1 + \lambda_2 w_2 v_2 + \lambda_3 w_1 v_2 + \lambda_4 w_2 v_1$$

liefert dies

$$\lambda_1 v_1 w_1 + \lambda_2 v_2 w_2 + \lambda_3 v_1 w_2 + \lambda_4 v_2 w_1 =$$
$$= \lambda_1 w_1 v_1 + \lambda_2 w_2 v_2 + \lambda_3 w_1 v_2 + \lambda_4 w_2 v_1$$
$$\Longrightarrow \lambda_3 v_1 w_2 + \lambda_4 v_2 w_1 = \lambda_3 w_1 v_2 + \lambda_4 w_2 v_1$$
$$\Longrightarrow \lambda_3 (v_1 w_2 - w_1 v_2) = \lambda_4 (v_1 w_2 - w_1 v_2) .$$

Diese Identität muß für alle Vektorenpaare (v, w) Gültigkeit besitzen, insbesondere also für $v = (1, 0)$ und $w = (0, 1)$. In diesem Fall gilt $v_1 w_2 - w_1 v_2 = 1$, also folgt

((2)) $$\lambda_3 = \lambda_4$$

Durch ((2)) geht Gleichung ((1)) über in

((3)) $$\beta(v,w) = \lambda_1 v_1 w_1 + \lambda_2 v_2 w_2 + \lambda_3 (v_1 w_2 + v_2 w_1).$$

Unter Beachtung der Beziehungen (i), (ii) und (iii) erhält man aus ((3)) die folgenden drei Beziehungen:

((4)) $$0 = \beta(v^o, v^*) = \lambda_1 v_1^o v_1^* + \lambda_2 v_2^o v_2^* + \lambda_3 (v_1^o v_2^* + v_2^o v_1^*),$$

((5)) $$\alpha_1^2 = \beta(v^o, v^o) = \lambda_1 v_1^o v_1^o + \lambda_2 v_2^o v_2^o + \lambda_3 (v_1^o v_2^o + v_2^o v_1^o)$$
$$= \lambda_1 v_1^{o2} + \lambda_2 v_2^{o2} + 2\lambda_3 v_1^o v_2^o ,$$

((6)) $$\alpha_2^2 = \beta(v^*, v^*) = \lambda_1 v_1^{*2} + \lambda_2 v_2^{*2} + 2\lambda_3 v_1^* v_2^* .$$

Hierbei handelt es sich um ein inhomogenes lineare Gleichungssystem[64], das leicht durch direktes Ausrechnen lösbar ist. Dabei geht wesentlich die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren v^o und v^* ein, die bekanntlich äquivalent mit der Tatsache ist, daß die Determinante der Matrix

64) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 75

$$\begin{pmatrix} v_1^o & v_2^o \\ v_1^* & v_2^* \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist[65]. Wird abkürzend gesetzt

((7)) $$d = dt \begin{pmatrix} v_1^o & v_2^o \\ v_1^* & v_2^* \end{pmatrix} = v_1^o v_2^* - v_2^o v_1^* \ {}^{66)},$$

so erhält man aus ((4)), ((5)), ((6)) die Lösungen

((8)) $$\lambda_1 = \frac{\alpha_1^2 v_2^{*2} + \alpha_2^2 v_2^{o2}}{d^2} ,$$

((9)) $$\lambda_2 = \frac{\alpha_1^2 v_1^{*2} + \alpha_2^2 v_1^{o2}}{d^2} ,$$

((10)) $$\lambda_3 = - \frac{\alpha_1^2 v_1^* v_2^* + \alpha_2^2 v_1^o v_2^o}{d^2} .$$

Auf die Durchführung der Rechnung kann verzichtet werden, da es sehr einfach ist, obiges System zu lösen. Beispielsweise erhält man direkt die Lösungen ((8)), ((9)), ((10)), wenn die Cramer'sche Regel verwendet wird[67].

Durch obige Ableitung wurde folgendes gezeigt: Falls es überhaupt ein Skalarprodukt β mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) gibt, so gilt

((3)) $$\beta(v,w) = \lambda_1 v_1 w_1 + \lambda_2 v_2 w_2 + \lambda_3 (v_1 w_2 + v_2 w_1),$$

wobei die Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3 nach ((8)), ((9)) bzw. ((10)) bestimmt werden.

Es bleibt nun folgendes zu beweisen: Falls man reelle Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 gemäß ((8)), ((9)) bzw. ((10)) definiert und damit nach ((3)) eine Abbildung β festlegt, so ist β ein Skalarprodukt mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii). Dies wird in einzelnen Schritten nachgewiesen:

65) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 81 ff.; insbesondere Aussage 13.3, S. 82.
66) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 89
67) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 96

(a) β ist bilinear : trivial.
(b) β ist symmetrisch : ebenfalls trivial.
(c) β ist positiv definit:

Sei $v \neq o$ vorgegeben; es gilt

$$\beta(v,v) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 (v_1 v_2 + v_1 v_2)$$

$$= \frac{1}{d^2} (\alpha_1^2 v_2^{*2} v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^{o2} v_1^2 + \alpha_1^2 v_1^{*2} v_2^2 + \alpha_2^2 v_1^{o2} v_2^2 -$$

$$- \alpha_1^2 v_1^* v_2^* \, 2 v_1 v_2 - \alpha_2^2 v_1^o v_2^o \, 2 v_1 v_2)$$

$$= \frac{1}{d^2} (\alpha_1^2 v_2^{*2} v_1^2 - \alpha_1^2 \, 2 v_1^* v_2^* v_1 v_2 + \alpha_1^2 v_1^{*2} v_2^2 +$$

$$+ \alpha_2^2 v_2^{o2} v_1^2 - \alpha_2^2 \, 2 v_1^o v_2^o v_1 v_2 + \alpha_2^2 v_1^{o2} v_2^2)$$

$$= \frac{1}{d^2} \left[\alpha_1^2 (v_2^* v_1 - v_1^* v_2)^2 + \alpha_2^2 (v_2^o v_1 - v_1^o v_2)^2 \right].$$

Als Summe von Quadraten ist $\beta(v,v)$ also stets eine nichtnegative reelle Zahl. Es gilt sogar $\beta(v,v) > o$; denn angenommen: $\beta(v,v) = o$, dann folgt wegen $\alpha_1^2 > o$ und $\alpha_2^2 > o$ [68] sofort

$$v_2^* v_1 - v_1^* v_2 = o,$$
$$v_2^o v_1 - v_1^o v_2 = o.$$

In Matrizenschreibweise lassen sich diese beiden Gleichungen zu

$$((11)) \qquad \begin{pmatrix} v_2^* & v_2^* \\ v_2^o & v_1^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Beachtet man nun, daß die Vektoren v^o und v^* linear unabhängig sind, so erhält man aus ((11)) sofort $\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = o$ [69], natürlich ist dann auch $v = (v_1, v_2) = o$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung $v \neq o$.

(d) β hat die Eigenschaft (i):

---

68) Vgl. Die Voraussetzungen des Satzes.
69) Dies ist eine bekannte Tatsache der Theorie linearer Gleichungssysteme; vgl. in diesem Zusammenhang Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 86, Aussage 13.7. Man erhält das Ergebnis auch unmittelbar aus der Cramer'schen Regel.

Es gilt

$$\beta(v^o, v^*) = \frac{1}{d^2}\Big[(\alpha_1^2 v_2^{*2} + \alpha_2^2 v_2^{o2}) v_1^o v_1^* + (\alpha_1^2 v_1^{*2} + \alpha_2^2 v_1^{o2}) v_2^o v_2^* -$$

$$- (\alpha_1^2 v_1^* v_2^* + \alpha_2^2 v_1^o v_2^o)(v_1^o v_2^* + v_2^o v_1^*) \Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[\alpha_1^2 v_1^o v_1^* v_2^{*2} + \alpha_2^2 v_1^o v_2^{o2} v_1^* + \alpha_1^2 v_2^o v_1^{*2} v_2^* +$$

$$+ \alpha_2^2 v_1^{o2} v_2^o v_2^* - \alpha_1^2 v_1^o v_1^* v_2^{*2} - \alpha_1^2 v_2^o v_1^{*2} v_2^* -$$

$$- \alpha_2^2 v_1^{o2} v_2^o v_2^* - \alpha_2^2 v_1^o v_2^{o2} v_1^* \Big]$$

$$= 0, \text{ quod erat demonstrandum.}$$

(e) β hat die Eigenschaft (ii):

Es gilt unter Berücksichtigung der in (c) berechneten Gleichung

$$\beta(v^o, v^o) = \frac{1}{d^2}\left[\alpha_1^2 (v_2^* v_1^o - v_1^* v_2^o)^2 + \alpha_2^2 (v_2^o v_1^o - v_1^o v_2^o)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{d^2} (\alpha_1^2 d^2 + \alpha_2^2 \cdot 0) = \alpha_1^2, \text{ quod erat demonstrandum.}$$

(f) β hat die Eigenschaft (iii):

Wie in (e) erhält man

$$\beta(v^*, v^*) = \frac{1}{d^2}\left[\alpha_1^2 (v_2^* v_1^* - v_1^* v_2^*)^2 + \alpha_2^2 (v_2^o v_1^* - v_1^o v_2^*)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{d^2} (\alpha_1^2 \cdot 0 + \alpha_2^2 \cdot d^2) = \alpha_2^2, \text{ quod erat demonstrandum.}$$

Der oben formulierte Satz 1 ist somit bewiesen. Es soll nun angeführt werden, was dieser Satz qualitativ aussagt.

Es ist zunächst festzustellen, daß mit jedem Skalarprodukt β auf dem $\mathbb{R}^2$ ein gewisser Orthogonalitätsbegriff für Paare von Vektoren und darüber hinaus ein bestimmter Betrag von Vektoren verbunden ist [70]. Man definiert auch allgemein: Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ heißen orthogonal (bezüglich des Skalarproduktes β), falls $\beta(v,w) = 0$ gilt [71]; unter dem Betrag oder der Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ (bezüglich des Skalarproduktes β) versteht man den Wert $+\sqrt{\beta(v,v)}$ [72].

---

70) Vgl. dazu Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 122 ff.
71) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 125.
72) Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 123 - Daß es sich bei dem Übergang $v \dashrightarrow +\sqrt{\beta(v,v)}$ tatsächlich um eine Norm handelt, wird dort unter Punkt 19.2 bewiesen.

Konkret bedeutet der Satz, daß in der v_1-v_2-Ebene ein Skalarprodukt so definiert ist, daß die durch v^o und v^* festgelegten Achsen "senkrecht" aufeinander stehen (das sagt (i) aus), daß v^o die Länge α_1 besitzt (das sagt (ii) aus) und daß α_2 genau die Länge von v^* ist (dies sagt (iii) aus).

Damit ist eine Loslösung von den bekannten euklidischen Eigenschaften der Ebene und eine Anpassung an das durch v^o und v^* bestimmte Koordinatensystem erfolgt, das durch die Abbildung β vollständig beschrieben wird, und die angibt, welche Geraden in der Ebene als Achsen zu wählen sind, und wie die Achseneinheiten festzulegen sind. Mittels des Skalarproduktes β ist es auch möglich, die Komponenten eines beliebigen Vektors v bezüglich des durch v^o und v^* festgelegten Koordinatensystems explizit auszurechnen.
Die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen sind durch

(39) $$\frac{1}{\alpha_1} \cdot v^o \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\alpha_2} \cdot v^*$$

gegeben. Die Komponente v_o von v auf der v^o-Achse wird durch

(40) $$\beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, v\right);$$

die Komponente v_* von v auf der v^*-Achse durch

(41) $$\beta\left(\frac{v^*}{\alpha_2}, v\right)$$

beschrieben.

Man erhält also die Komponente von v auf einer Achse, indem v mit dem betreffenden Achsen-Einheitsvektor (bezüglich β) skalar multipliziert wird.

Es soll nun kurz dargelegt werden, wie man auf die Darstellung der Komponenten v_o und v_* von v kommt.
Der Bedeutung von v_o und v_* entsprechend muß die Gleichung

(42) $$v = v_o \cdot \frac{v^o}{\alpha_1} + v_* \cdot \frac{v^*}{\alpha_2}$$

gelten. Folglich ist

(43) $$\begin{aligned} \beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, v\right) &= \beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, v_o \frac{v^o}{\alpha_1} + v_* \frac{v^*}{\alpha_2}\right) \\ &= v_o\, \beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, \frac{v^o}{\alpha_1}\right) + v_*\, \beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, \frac{v^*}{\alpha_2}\right) \\ &= v_o \end{aligned}$$

und entsprechend

(44) $$\beta\left(\frac{v^*}{\alpha_2}, v\right) = v_* .$$

Die durch β induzierte Norm $v \longrightarrow \sqrt{\beta(v, v)}$, mit der die Achseneinheiten festgelegt wurden, ist zu modifizieren, und zwar wird die der Summennorm entsprechende Norm

(45) $$v \longrightarrow |v_o| + |v_*|$$

oder ausführlich

(46) $$v \longrightarrow \left|\beta\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, v\right)\right| + \left|\beta\left(\frac{v^*}{\alpha_2}, v\right)\right|$$

betrachtet, die mit N_β bezeichnet sei.

Angewandt auf den konkreten Fall des Modells wird gesetzt[73]:

(47) $$v^o = v^{(j)}(x, y, t),$$

(48) $$v^* = k^{(j)}(x, y, t).$$

Der obige Satz wird dann anwendbar, da die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ vorausgesetzt wird. Die reellen Zahlen α_1 und α_2 werden festgelegt durch

(49) $$\alpha_1 = \left\| v^{(j)}(x, y, t) \right\| = K_j(x, y, t),$$

(50) $$\alpha_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left\| v^{(i)}(x, y, t) \right\| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K_i(x, y, t) = K(x, y, t) - K_j(x, y, t).$$

Es sei schließlich $\beta^{(j)}_{(x, y, t)}$ das durch diese Größen festgelegte Skalarprodukt. Damit ist die Zerlegung eines Vektors v in Zentrums- und Konkurrenzkomponente vollständig festgelegt.

Allgemein auf die Überlegungen zur Kaufkrafttendenz angewandt gilt:

Ein Vektor $v = (v_1, v_2, o)$ im Punkte (x, y, t) des Umweltraumes E beschreibt aus der Perspektive des Zentrums U_j eine spezielle Kaufkrafttendenz, die durch zwei Größen gekennzeichnet ist:

(1) den Betrag der Kaufkraft; dies ist genau die Länge des Vektors v, gemessen mit der Norm $N_{\beta^{(j)}_{(x, y, t)}}$,

(2) die Richtung der Kaufkraft, die beschreibt, wie sich der Betrag $N_{\beta^{(j)}_{(x, y, t)}}(v)$ aufteilen wird, und zwar wird auf U_j der Betrag

(51) $$v_Z = \beta^{(j)}_{(x, y, t)}\left(\frac{v^o}{\alpha_1}, v\right) = \beta^{(j)}_{(x, y, t)}\left(\frac{v^{(j)}(x, y, t)}{K_j(x, y, t)}, v\right)$$

---

73) Im folgenden wird der zwei-dimensionale Raum als Unterraum des drei-dimensonalen Raumes betrachtet, d.h. anstelle von (v_1, v_2) wird jetzt wieder (v_1, v_2, o) geschrieben.

fallen, während auf die Konkurrenz von U_j der Betrag

$$v_K = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{v^*}{\mathcal{L}_2}, v\right) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{k^{(j)}(x,y,t)}{K(x,y,t) - K_j(x,y,t)}, v\right) \tag{52}$$

fällt.

Sind beide Komponenten v_Z und v_K nicht-negativ, ist die Bedeutung der Zerlegung von $N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)$ in v_Z und v_K klar; die Größen

$$\frac{v_Z}{N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)} \quad \text{und} \quad \frac{v_K}{N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)} \tag{53}$$

sind als Wahrscheinlichkeiten zu deuten.

Ist etwa die Zentrumskomponente v_Z negativ, kann bei der zugrundeliegenden Tendenz v von dem zur Verfügung stehenden Betrag unmöglich ein Teil zum Zentrum U_j fließen, und v_Z ist ein Maß für diese Unmöglichkeit.

Entsprechendes gilt für den Fall, daß die Konkurrenzkomponente v_K negativ ist. Letztere Situation kann man - etwa im Falle einer negativen Zentrumskomponente - auch folgendermaßen interpretieren: erst wenn sich die Tendenz v gänzlich umkehren würde, d.h. im Falle der Kauftendenz -v, wird wahrscheinlich der Betrag $|v_Z|$ der Gesamtkaufkraft $N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(-v) = N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)$ zum Zentrum U_j fließen.
Im Zusammenhang mit den bereits eingeführten Kaufkrafttendenzen, natürlich jetzt aus der Perspektive des Zentrums U_j betrachtet, ist auf folgende Bedingungen zu achten, wenn der Ansatz als sinnvoll charakterisiert werden soll:

(a) Der Vektor $v^{(j)}(x,y,t)$ muß folgende Kaufkrafttendenz kennzeichnen: Die Kaufkraft $K_j(x,y,t)$ wird mit der Wahrscheinlichkeit 1 zum Zentrum U_j fließen.

(b) Der Vektor $k^{(j)}(x,y,t)$ muß folgende Tendenz beschreiben: Die Kaufkraft $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K_i(x,y,t) = K(x,y,t) - K_j(x,y,t)$ wird mit der Wahrscheinlichkeit 1 zur Konkurrenz des Zentrums U_j fließen.

(c) Nach Definition der Vektoren $v^{(1)}(x,y,t), \ldots, v^{(n)}(x,y,t)$ wird sich die Kaufkraft $K(x,y,t)$ "im gewichteten Mittel" wahrscheinlich in die Richtung bewegen, die durch den Vektor

$$\sum_{i=1}^{n} v^{(i)}(x,y,t) \tag{54}$$

festgelegt ist. Dieser Vektor, der im folgenden mit $k(x,y,t)$ bezeichnet sei, muß folgende Tendenz charakterisieren:
Die Kaufkraft $K(x,y,t)$ wird mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p_j(x,y,t)$ zur Konkurrenz des Zentrums U_j fließen; mit anderen Worten: vom

Betrag $K(x,y,t)$ wird U_j wahrscheinlich $K_j(x,y,t)$ erhalten.

Dabei ist zu beachten, daß die Kaufkraft stets mit Hilfe der Norm $N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}$ gemessen werden muß.
Also seien die genannten Bedingungen geprüft:

zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v^{(j)}(x,y,t)) &= \left|\beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)}, v^{(j)}(x,y,t)\right)\right| + \\ &+ \left|\beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{k^{(j)}(x,y,t)}{K(x,y,t)-K_j(x,y,t)}, v^{(j)}(x,y,t)\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{K_j(x,y,t)} \cdot \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t), v^{(j)}(x,y,t))\right| \\ &= \frac{\|v^{(j)}(x,y,t)\|^2}{K_j(x,y,t)} \\ &= K_j(x,y,t), \end{aligned}$$

so daß (a) offensichtlich erfüllt ist.

zu (b): Ebenso berechnet man

$$N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(k^{(j)}(x,y,t)) = K(x,y,t) - K_j(x,y,t),$$

woraus sich sofort (b) ableiten läßt.

zu (c): Es gilt

$$k(x,y,t) = v^{(j)}(x,y,t) + k^{(j)}(x,y,t),$$

also stimmt wegen (a) bzw. (b) die Zentrumskomponente von $k(x,y,t)$ mit $K_j(x,y,t)$, die Konkurrenzkomponente mit $K(x,y,t) - K_j(x,y,t)$ überein. Hieraus läßt sich (c) unmittelbar folgern.

Hierzu noch zwei Anmerkungen:

(d) Notwendig ist, daß der Vektor $k(x,y,t)$ aus der Perspektive eines jeden Zentrums U_j den gleichen Kaufbetrag charakterisiert, nämlich die absolute Kaufkraft $K(x,y,t)$. Dies ist nach (c) tatsächlich der Fall, denn $K(x,y,t)$ ist ja von j unabhängig.

(e) Ein Vektor $v^{(j)}(x,y,t)$ verliert aus der Perspektive des Zentrums U_j bei mehreren Zentren seine ins Anschauliche übertragbare Bedeutung, da er nicht mehr auf ein festes Konkurrenzzentrum U_i bezogen wird, sondern die Relation zur gesamten Konkurrenz, $U_1, \ldots, U_{j-1}, U_{j+1}, \ldots, U_n$ herstellt. Das bedeutet nicht, daß spezielle Aktivitäten eines Zentrums U_i in bezug auf U_j keine Berücksichtigung finden können: Veränderungen von $v^{(j)}(x, y, t)$ implizieren Veränderungen von $k^{(j)}(x, y, t)$.

Abschließend sei noch auf das Problem eingegangen, ob die eingeführten Kaufkrafttendenzen im abstrakten Sinne Vektoren, d.h. die Bedeutung mit den vektoriellen Operationen zu vereinbaren sind.
Dies ist der Fall, wie man anhand folgender Bedingungen erkennt:

((1)) Zu einem Teil wird die Bedeutung eines Vektors v durch die beiden Abbildungen

$$v \longrightarrow \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ v\right) \quad \text{und} \quad v \longrightarrow \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{k^{(j)}(x,y,t)}{K(x,y,t)-K_j(x,y,t)},\ v\right)$$

beschrieben. Diese sind linear; die hierdurch beschriebenen Eigenschaften von v "operieren also linear" auf der v_1-v_2-Ebene.

((2)) Zum anderen wird die Bedeutung von v durch seine Länge $N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)$ charakterisiert; da eine Summennorm für $N_{\beta^{(j)}_{(x,y,t)}}(v)$ gewählt wurde, erhält man auch hier eine sinngemäß zu interpretierende lineare Operation.

4.6. Zentrumsassoziierte Wertungsfelder

Die vektorielle Darstellung der Kaufkraft führt nun zur Definition eines speziellen 1-kovarianten Tensorfeldes $\mathfrak{S}^{(j)}$, d.h. für $(x, y, t) \in E$ ist $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}: T_{(x,y,t)} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dieses Tensorfeld $\mathfrak{S}^{(j)}$ sei das dem Zentrum U_j assoziierte Wertungsfeld genannt.

Ausgehend von einem Punkt (x, y, t) des Umweltraumes E, in dem die geforderte lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ gegeben ist, wird die Faser $T_{(x,y,t)}$ des Konstruktums M als Repräsentationsgebilde der auf U_j bezogenen Kaufkraft angesehen. Das bedeutet, daß nur in dem durch $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ festgelegten Unterraum von $T_{(x,y,t)}$ gerechnet wird.

Für einen Vektor $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}$ soll $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),(v_1,v_2,v_3)\right]$ die auf U_j bezogene Beurteilung der durch (v_1, v_2, o) in (x, y, t) gegebenen Kaufkrafttendenz kennzeichnen; demgemäß wird $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}$ folgendermaßen definiert:

$$(55) \qquad \mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),(v_1,v_2,v_3)\right] := \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left[\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ v_1, v_2, o)\right].$$

Für Punkte $(x, y, t) \in E$, in denen die Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ linear abhängig sind, wird

$$(56) \qquad \mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)} \equiv 0$$

gesetzt. Dies bleibt aber im folgenden ausgeschlossen.

Da die Abbildung $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}$ bereits im Zusammenhang mit der Darstellung des Skalarproduktes $\beta^{(j)}_{(x,y,t)}$ untersucht wurde, genügt es, einen kurzen zusammenfassenden Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der genannten Abbildung zu geben.

((1)) $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}: T_{(x,y,t)} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist tatsächlich eine lineare Abbildung[74].

((2)) $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}$ repräsentiert in bezug auf U_j die wahrscheinliche, "richtige Bewertung der Kaufkrafttendenzen, denn

(a) $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),\ v^{(j)}(x,y,t)\right] = K_j(x,y,t)$

(b) $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),\ k^{(j)}(x,y,t)\right] = 0,$

woraus unmittelbar

$$\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),\ k(x,y,t)\right] = K_j(x,y,t)$$

folgt. Es sei bemerkt, daß $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}$ durch die Bedingungen (a), (b) und die weitere notwendige, aber bedeutungslose Festlegung

(c) $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}\left[(x,y,t),\ (0,0,1)\right] = 0$

bereits vollständig beschrieben ist. "Richtig" bezieht sich in obigem Zusammenhang auf das tatsächliche Konsumentenverhalten. Dieses ist zwar mit Hilfe gewisser Wahrscheinlichkeiten formuliert worden, was jedoch nicht bedeutet, daß obige Darstellung der Marktsituation als nicht exakt angesehen werden muß; schließlich sind Wahrscheinlichkeiten exakte Größen![75]

((3)) Die Abbildung $\mathfrak{S}^{(j)}_{(x,y,t)}$ ist zur Wertung von Kaufkrafttendenzen definiert worden; jene Tendenzen beziehen sich per definitionem auf ein mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten definiertes Koordinaten-

---

74) Dies sieht man folgendermaßen ein: Zunächst ist der Übergang $(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow (v_2, v_2, o)$ linear, ferner ist $\beta^{(j)}_{(x,y,t)}$ bilinear, so daß sich sofort die Linearität der Abbildung $(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow \beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left[\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ (v_1, v_2, o)\right]$ ergibt. Vgl. Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 61 f.

75) Hierzu ein erläuterndes Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit p für den Ausgang A eines Experimentes sei 1/2; dann ist p = 1/2 eine exakte mathematische Relation, die a priori gar nichts mit der Häufigkeit des Ausgangs A bei n-facher unabhängiger Durchführung des Experimentes zu tun hat.

system, so daß $\sigma^{(j)}_{(x,a,t)}$ allgemeiner als eine Größe angesehen werden kann, die aus einer vorgegebenen Orientierung den "wahrscheinlichen Anteil" des Zentrums U_j bestimmt. Um dies zu belegen, wird bemerkt, daß das Skalarprodukt auch auf die folgende Weise hätte festgelegt werden können:

Man wichtet das Zentrum U_j durch

(57) $$p_j(x, y, t)\left\langle (x^{(j)}, y^{(j)}, t) - (x, y, t)\right\rangle$$

und die Konkurrenz des Zentrums U_j durch

(58) $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} p_i(x, y, t)\left\langle (x^{(i)}, y^{(i)}, t) - (x, y, t)\right\rangle,$$

also durch Größen, die durch wahrscheinliche Verteilungen charakterisiert wurden. Da diese Wichtung derjenigen durch

$$\frac{v^{(j)}(x, y, t)}{K(x, y, t)} \quad \text{und} \quad \frac{k^{(j)}(x, y, t)}{K(x, y, t)}$$

gleicht, wird $\beta^{(j)}_{(x, y, t)}$ durch die Forderung festgelegt, daß der Vektor $\frac{v^{(j)}(x, y, t)}{K(x, y, t)}$ die Länge $p_j(x, y, t)$ und $\frac{k^{(j)}(x, y, t)}{K(x, y, t)}$ die Länge $1-p_j(x, y, t) =$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} p_i(x, y, t) \text{ besitzt.}$$

Es ist also möglich, die Wertung durch $\sigma^{(j)}_{(x, y, t)}$ wahrscheinlichkeitstheoretisch zu formulieren und so eine Vergleichsgröße zu anderen Wertungen zu erhalten.

4.7. Theorie der sozio-ökonomischen Feldspannung

Da die Definition einer sozio-ökonomischen Spannung von der Bestimmung eines modellgebundenen Normzustandes, etwa eines normalen, optimalen oder stabilen Zustandes, abhängig ist, besitzen alle spannungserzeugenden Elemente die gleiche Wirkungsrichtung, die im absatzwirtschaftlichen Kalkül der Einkaufszentren eine negativ bewertete Größe darstellt.
Es können dann die Aussagen:

"Der reale Zustand ist eine Verzerrung des Normzustandes" bzw.
"der Normzustand ist eine Verzerrung des realen Zustandes"

als völlig äquivalent angesehen werden, sofern ausschließlich auf eine quantitative Analyse der Verzerrung hingesteuert wird.

Die Konsequenz liegt damit auf der Hand:

Es wird die tatsächliche Marktsituation - beschrieben durch zentrums- und konkurrenzorientierte Kaufkraftfelder und deren zentrumsbezogene Bewertung vermöge $\sigma^{(j)}_{(x, y, t)}$ bzw. allgemeiner $\beta^{(j)}_{(x, y, t)}$ - als Beziehungsgröße, also als modellgebundener Normzustand zugrundegelegt und ein evtl. abweichender, nach irgendwelchen Kriterien festzustellender Optimalzustand als Verzerrung der Realität angesehen.

Die Vorteilhaftigkeit dieses Vorgehens ist damit begründet, daß bei der Festlegung des Normzustandes keine subjektiven Maßstäbe angelegt werden müssen und die Darstellung der sozio-ökonomischen Spannung, in die ein Zentrum U_j geraten kann, die Zugrundelegung eines Zentrum-Konkurrenz-Systems verlangt.

Die allgemeine Formulierung der sozio-ökonomischen Feldspannung hat als Ausgangsbasis die Tatsache, daß die reale Marktsituation mit Hilfe spezieller linear unabhängiger Vektoren dargestellt wird, indem diese Vektoren zur Konstruktion eines Koordinatensystems herangezogen werden; eine Verzerrung der Situation muß also darauf zurückgeführt werden, daß - etwa aus der Perspektive des Zentrums U_j - nicht die wahrscheinlichen Zentrums- und Konkurrenz-orientierten Kaufkraftvektorkomponenten $v^{(j)}_{(x, y, t)}$ und $k^{(j)}_{(x, y, t)}$ und das zugehörige, in dem mathematischen Satz I formulierte Skalarprodukt $\beta^{(j)}_{(x, y, t)}$, sondern "falsche Größen" $\hat{v}^{(j)}(x, y, t)$, $\hat{k}^{(j)}(x, y, t)$ und $\hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)}$ zur Bewertung der Situation zugrundegelegt werden: ein vorgegebener Kaufkraftvektor $v = (v_1, v_2, o)$ in dem Punkt (x, y, t) des Umweltraumes E wird also nicht im wahrscheinlichen, richtigen System, sondern in einem verzerrten System interpretiert.

Die Verzerrung kann beispielsweise zur Folge haben - vorausgesetzt, daß die euklidische Norm etwa die auf $\beta^{(j)}_{(x, y, t)}$ bzw. $\hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)}$ zurückgehenden Abstandsverhältnisse widerspiegelt -, daß der Zentrumsanteil verkleiner und der Konkurrenzanteil vergrößert wird.

Die Aufgabe besteht jetzt also darin, aufgrund der genannten Vorstellung zu einer sinnvollen Beschreibung der Verzerrung des Systems zu gelangen. Ein zweiter mathematischer Satz wird hierbei eine Lösung liefern:

<u>Satz II:</u> Die Länge des Vektors $\hat{v}^{(j)}(x, y, t)$ im verzerrten System sei mit $\hat{K}_j(x, y, t)$ bezeichnet, so daß die Länge des Vektors $\hat{k}^{(j)}(x, y, t)$ mit $K(x, y, t) - \hat{K}_j(x, y, t)$ anzusetzen ist. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung h der v_1-v_2-Ebene in sich mit folgenden Eigenschaften:

(i) $$\beta^{(j)}_{(x, y, t)}\left[\hat{v}^{(j)}(x, y, t), v\right] = \beta^{(j)}_{(x, y, t)}\left[v^{(j)}(x, y, t), h(v)\right]$$

(ii) $$\hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)}\left[\hat{k}^{(j)}(x, y, t), v\right] = \beta^{(j)}_{(x, y, t)}\left[k^{(j)}(x, y, t), h(v)\right]$$

für alle Vektoren v der v_1-v_2-Ebene des $\mathbb{R}^3$.

Bevor auf die Bedeutung dieses Satzes eingegangen wird, soll ein Beweis angeführt werden.

Es wird in der üblichen Weise vorgegangen: Zunächst wird die Hypothese aufgestellt, h wäre bereits gefunden; dies erlaubt es, das spezielle Aussehen der Abbildung h anzugeben.

Da es sich bei h um einen Endomorphismus der Ebene handelt und $v^{(j)}(x,y,t)$ und $k^{(j)}(x,y,t)$ eine Basis der Ebene bilden, gibt es reelle Zahlen a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22}, so daß die Gleichungen

$$h(v^{(j)}(x,y,t)) = a_{11}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{21}\, k^{(j)}(x,y,t)$$

und

$$h(k^{(j)}(x,y,t)) = a_{12}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{22}\, k^{(j)}(x,y,t)$$

erfüllt sind. Nach Relation (i) gilt dann

$$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\, v^{(j)}(x,y,t)) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, h(v^{(j)}(x,y,t)))$$

$$= \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, a_{11}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{21}\, k^{(j)}(x,y,t))$$

$$= a_{11}\, \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, v^{(j)}(x,y,t)) + a_{21}\, \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, k^{(j)}(x,y,t))$$

$$= a_{11}\, K_j(x,y,t)^2 + 0$$

$$= a_{11}\, K_j^2(x,y,t)$$

bzw.

$$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\, k^{(j)}(x,y,t)) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, h(k^{(j)}(x,y,t)))$$

$$= \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, a_{12}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{22}\, k^{(j)}(x,y,t))$$

$$K_j(x,y,t)^2 + 0 = a_{12}\, K_j^2(x,y,t).$$

Somit erhält man

((1)) $$a_{11} = \frac{1}{K_j^2(x,y,t)}\, \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\, v^{(j)}(x,y,t))$$

bzw.

((2)) $$a_{12} = \frac{1}{K_j^2(x,y,t)}\, \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\, k^{(j)}(x,y,t))$$

In gleicher Weise wird jetzt die Relation (ii) behandelt; man erhält:

$$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\, v^{(j)}(x,y,t)) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(k^{(j)}(x,y,t),\, a_{11} v^{(j)}(x,y,t) +$$

$$+\, a_{21} k^{(j)}(x,y,t)) = a_{21}\,(K(x,y,t) - K_j(x,y,t))^2$$

bzw.

$$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\, k^{(j)}(x,y,t)) = a_{22}(K(x,y,t) - K_j(x,y,t))^2.$$

Also gilt:

((3)) $$a_{21} = \frac{1}{(K(x,y,t) - K_j(x,y,t))^2}\, \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\, v^{(j)}(x,y,t))$$

bzw.

((4)) $$a_{22} = \frac{1}{(K(x,y,t) - K_j(x,y,t))^2}\, \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\, k^{(j)}(x,y,t))\ .$$

Sofern also eine Abbildung h mit den geforderten Eigenschaften existiert, wird sie bezüglich der Basis $v^{(j)}(x,y,t)$, $k^{(j)}(x,y,t)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

beschrieben, in der die Koeffizienten a_{ij} den berechneten Wert besitzen. Der Beweis des Satzes wird vollständig, wenn noch folgende Behauptung verifiziert wird: Falls man eine Abbildung h der Ebene in sich durch die Forderung nach Linearität und die Bestimmungen

$$h((v^{(j)}(x,y,t)) = a_{11}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{21}\, k^{(j)}(x,y,t)$$

und $$h(k^{(j)}(x,y,t)) = a_{12}\, v^{(j)}(x,y,t) + a_{22}\, k^{(j)}(x,y,t)$$

definiert (a_{ij} wie in ((1)), ((2)), ((3)) bzw. ((4))), so hat h tatsächlich die Eigenschaften (i) und (ii).

Es soll der Nachweis im Falle der Relation (i) explizit durchgeführt werden; der Beweis der Identität (ii) verläuft analog.

Sei v ein Vektor der v_1-v_2-Ebene des $\mathbb{R}^3$; da $v^{(j)}(x,y,t)$ und $k^{(j)}(x,y,t)$ eine Basis dieser Ebene bilden, gibt es reelle Zahlen a_1 und a_2, so daß sich v in der Form

$$v = a_1\, v^{(j)}(x,y,t) + a_2\, k^{(j)}(x,y,t)$$

darstellen läßt. Folglich gilt

$$h(v) = h(a_1 v^{(j)}(x,y,t) + a_2 k^{(j)}(x,y,t)) = a_1\, h(v^{(j)}(x,y,t)) + a_2\, h(k^{(j)}(x,y,t)).$$

Somit erhält man

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(v)) = a_1\,\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(v^{(j)}(x,y,t))) +$$
$$+ a_2\,\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(k^{(j)}(x,y,t))).$$

Nun gilt

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(v^{(j)}(x,y,t))) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ a_{11}v^{(j)}(x,y,t) +$$
$$+ a_{21}\,k^{(j)}(x,y,t))$$
$$= a_{11}\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ v^{(j)}(x,y,t)) + a_{21}\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ k^{(j)}(x,y,t))$$
$$= a_{11}K_j^2(x,y,t) + 0 = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ v^{(j)}(x,y,t));$$

entsprechend berechnet man mit ((2)) die Gleichung

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(k^{(j)}(x,y,t))) = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ k^{(j)}(x,y,t)).$$

Mit den so erhaltenen beiden Relationen ergibt sich

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\ h(v)) = a_1\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), v^{(j)}(x,y,t)) +$$
$$+ a_2\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ k^{(j)}(x,y,t))$$
$$= \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ a_1\,v^{(j)}(x,y,t) + a_2\,k^{(j)}(x,y,t))$$
$$= \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ v).$$

Für die definierte Abbildung h ist also (i) erfüllt.

Die Deutung des somit bewiesenen Satzes ist keineswegs schwierig.

Sei irgendeine Kaufkrafttendenz v gegeben; bekanntlich wird dann durch

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ v\right) \tag{59}$$

die Komponente von v bezüglich der wahrscheinlichen Zentrumsachse gegeben. Im verzerrten System wird die Komponente

$$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{\hat{v}^{(j)}(x,y,t)}{\hat{K}_j(x,y,t)},\ v\right) \tag{60}$$

in der Regel von obiger abweichen, und es ist offensichtlich, daß diese Abweichung in gewisser Form den Wert der Spannung beeinflussen wird. Man wird deshalb erwarten, daß im Falle

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{v^{(j)}(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ v\right) = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\frac{\hat{v}^{(j)}(x,y,t)}{\hat{K}_j(x,y,t)},\ v\right) \tag{61}$$

keine Beeinträchtigung des zu definierenden Spannungswertes festzustellen sein wird. Aus der letzten Identität folgert man

$$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}\left(v^{(j)}(x,y,t),\ \frac{\hat{K}_j(x,y,t)}{K_j(x,y,t)},\ v\right) = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),\ v). \tag{(5)}$$

Der Wert $\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), v)$ ist also im allgemeinen nicht mit $\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t), v)$ identisch, wir haben hingegen v im wahrscheinlichen Kaufkraftsystem durch einen verzerrten Vektor

$$\frac{\hat{K}_j(x,y,t)}{K_j(x,y,t)}\ v \tag{62}$$

zu ersetzen.

Das entsprechende wird jetzt für die Bestimmung der Konkurrenzkomponente durchgeführt. Analog erhält man hier eine Nicht-Beeinflussung des Spannungswertes, falls man bei Messungen im wahrscheinlichen System analog((5)) v durch

$$\frac{K(x,y,t) - \hat{K}_j(x,y,t)}{K(x,y,t) - K(x,y,t)}\cdot v \tag{63}$$

ersetzt.

Spannungslosigkeit kann folglich nur dann herrschen, falls dieser Ersetzungsprozeß zum gleichen Ergebnis führt, d.h. für

$$\frac{\hat{K}_j(x,y,t)}{K_j(x,y,t)} = \frac{K(x,y,t) - \hat{K}_j(x,y,t)}{K(x,y,t) - K_j(x,y,t)}\ . \tag{64}$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\hat{K}_j(x,y,t)(K(x,y,t) - K_j(x,y,t)) = K_j(x,y,t)(K(x,y,t) - \hat{K}_j(x,y,t))$$
$$\Longleftrightarrow \hat{K}_j(x,y,t)\,K(x,y,t) - \hat{K}_j(x,y,t)\cdot K_j(x,y,t)$$
$$= K_j(x,y,t)\,K(x,y,t) - K_j(x,y,t)\,\hat{K}_j(x,y,t)$$
$$\Longleftrightarrow \hat{K}_j(x,y,t) = K_j(x,y,t).$$

Spannungslosigkeit ist also für den Fall (und nur für diesen!)

(65) $$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),v) = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),v)$$

und

(66) $$\beta^{(j)}_{(x,y,t)}(k^{(j)}(x,y,t),v) = \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),v)$$

gegeben. Bei Spannung hat man hingegen nach vorangegangener Überlegung mit Relationen

(67) $$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t),v) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(v^{(j)}(x,y,t),\alpha_1 v)$$

und

(68) $$\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),v) = \beta^{(j)}_{(x,y,t)}(k^{(j)}(x,y,t),\alpha_2 v)$$

mit geeigneten - unter Umständen von v abhängigen - reellen Zahlen α_1 und α_2 zu rechnen, die von 1 verschieden sind und darüber hinaus nicht übereinstimmen.

Der bewiesene Satz besagt nun, daß man die letzten beiden Relationen zusammenfassen kann, indem man nicht ausschließlich geeignete Verkürzungen oder Verlängerungen von v zuläßt, sondern eine gemeinsame, d.h. für beide Beziehungen gültige lineare Abbildung h der Ebene in sich einführt. Die Zerlegung eines Vektors v im verzerrten System ist somit bei Berücksichtigung der im allgemeinen verschiedenen Achseneinheiten quantitativ identisch mit der Zerlegung eines verzerrten Vektors h(v) im normierten System. Die sozio-ökonomische Spannung wird im Modell also durch h-id realisiert; wichtig ist selbstverständlich die Abweichung der Abbildung h von der identischen Abbildung.

Zwei wesentliche Momente sind dabei zu beachten:

(1) Die Spannung wird nach Konstruktion im Punkte (x, y, t) durch eine lineare Abbildung dargestellt. Die Linearität des Operators war eine konsequente Folgerung aus dem allgemeinen Ansatz, der weiter oben dargestellt ist; sie ist also nicht als Hypothese anzusehen.

(2) Die Spannung h-id besitzt als lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ in sich (d.h. als Element des Vektorraumes $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$[76]) nach trivialer Fortsetzung zu einem Element des Raumes $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ eine natürliche, eindeutige Beziehung zu einem 1-kovarianten-1-kontravarianten Tensor in (x, y, t). Dies ist zur funktionalen Deutung der Spannung von großer Bedeutung; es soll jedoch nicht auf jenen Zusammenhang eingegangen werden[77].

Die Darstellung der sozio-ökonomischen Spannung ermöglicht es jetzt, verschiedene Meßverfahren für diese Größe anzugeben.

76) Siehe Kowalsky, H.-J.: a.a.O., S. 55 ff.
77) Zur Theorie vgl. Hicks, N.J.: a.a.O., S. 54 f.

Es muß ausschließlich eine Normierung auf dem Raum $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ angegeben werden. So erhält man automatisch eine Maßgröße für die Spannung. Zunächst sollen allgemeine Normen für Homomorphismen betrachtet werden:

(1) Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Homomorphismus, der bzgl. einer Basis durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beschrieben wird; dann ist durch

(69) $$N(\varphi) := |a| + |b| + |c| + |d|$$

eine Norm auf der Menge $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ aller Homomorphismen des $\mathbb{R}^2$ in sich gegeben.

(2) Die Situation sei wie in (1); dann wird durch

(70) $$N(\varphi) := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

eine Norm auf $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert.

In den Fällen (1) und (2) identifiziert man also einen Homomorphismus φ vermöge einer Matrixdarstellung mit einem speziellen Vektor des $\mathbb{R}^4$ und normiert φ etwa vermöge einer Summen- bzw. euklidischen Norm. Es ist klar, daß man auf diese Weise verschiedene weitere Normen finden kann (z.B. die Maximumsnorm[78]).

Anders geht man in folgendem Beispiel vor:

(3) Für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ betrachtet man - bezüglich einer fest vorgegebenen Norm N_o auf $\mathbb{R}^2$, die abkürzend mit $|.|$ gekennzeichnet sei (also $N_o(v) = |v|$) - das Verhältnis der Längen von $\varphi(v)$ und v:

$$\frac{|\varphi(v)|}{|v|},$$

durch $$\sup_{v \neq o} \frac{|\varphi(v)|}{|v|} = N(\varphi)$$

wird dann auf dem Raum $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine Norm definiert. Es läßt sich leicht die Gleichung

(71) $$\sup_{|v| \neq o} \frac{|\varphi(v)|}{|v|} = \sup_{|v|=1} \frac{|\varphi(v)|}{|v|}$$

nachweisen, folglich gilt

(72) $$N(\varphi) = \sup_{|v|=1} \frac{|\varphi(v)|}{|v|} = \max_{|v|=1} |\varphi(v)|$$ [79].

Die letzte Relation veranschaulicht die Messung mit N besonders: $N(\varphi)$ charakterisiert die Verzerrung des Einheitskreises durch den Homomorphismus φ.

78) Auf die Ersatzbarkeit des Supremums durch das Maximum soll hier nicht weiter eingegangen werden.
79) Auf die Ersetzbarkeit des Supremums durch das Maximum soll hier nicht eingegangen werden.

Jede der betrachteten Normen liefert eine Maßgröße für die Spannung, und zwar hat man für φ stets h-id einzusetzen; dabei bezeichnet id die Identität der Ebene. Naheliegend ist es, Beispiel (3) heranzuziehen, da so ohne Matrixdarstellung auf die "richtige" Norm $N^{(j)}_{(x,y,t)}$ der Ebene zurückgegriffen wird; also setzt man den Wert der Spannung h durch

$$(73) \qquad Sp(h) = \max_{N^{(j)}_{(x,y,t)}(v)=1} N^{(j)}_{(x,y,t)}(h(v) - v)$$

fest[80].

Es sei noch erwähnt, daß man etwa auch die Zahl

$$(74) \qquad N^{(j)}_{(x,y,t)}(h(k(x,y,t)) - k(x,y,t))$$

zur Charakterisierung der Spannung heranziehen kann; hier beschreiben wir also die Spannung durch die Verzerrung der gesamten Kaufkrafttendenz $k(x,y,t)$.

4.8. Standortspannung

Die allgemeinen Überlegungen über die sozio-ökonomische Feldspannung sollen jetzt auf derartige Spannungsverhältnisse angewandt werden, die sich aus ungünstigen Standortbedingungen ergeben. Dabei werden die zuvor allgemein behandelten "falschen Größen" $\hat{v}^{(j)}_{(x,y,t)}$, $\hat{k}^{(j)}_{(x,y,t)}$ und $\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}$ mit Hilfe der anfangs definierten Shopping Valenzen $A_1(x,y,t), \ldots, A_n(x,y,t)$ festgelegt.

Für diesen Zweck müssen zunächst wieder die Einheitsvektoren $\langle (x^{(i)}, y^{(i)}, t) - (x,y,t) \rangle$ in Richtung von (x,y,t) nach $(x^{(i)}, y^{(i)}, t)$ eingeführt werden. Diese Vektoren werden dann durch eine "zugehörige" Zerlegung der gesamten Kaufkraft in (x,y,t), die sich aus den Wahrscheinlichkeiten

$$(75) \qquad \frac{A_1(x,y,t)}{A(x,y,t)}, \ldots, \frac{A_n(x,y,t)}{A(x,y,t)}$$

herleitet, gewichtet. Die gesamte Shopping Valenz aller n Zentren in (x,y,t) bezeichnet dabei

$$(76) \qquad A(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x,y,t).$$

Es wird also definiert:

$$(77) \qquad \hat{v}^{(j)}(x,y,t) := \frac{A_j(x,y,t)}{A(x,y,t)} \cdot K(x,y,t) \langle (x^{(j)}, y^{(j)}, t) - (x,y,t) \rangle$$

und

---

80) Zu erwähnen ist, daß $Sp(h) = o$ nur im Falle $h = id$ gilt. Also ist die Spannung Null, falls durch h gar nichts verzerrt wird. Diese triviale Bedingung ist somit erfüllt.

$$(78) \qquad \hat{k}^{(j)}(x,y,t) := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{A_i(x,y,t)}{A(x,y,t)} \cdot K(x,y,t) \langle (x^{(i)}, y^{(i)}, t) - (x,y,t) \rangle .$$

Diese Konstruktion entspricht offensichtlich der in (35) und (38) definierten Zentrums- und Konkurrenz-orientierten Kaufkraftfelder. Es wird lediglich $p_i(x,y,t)$ durch $\frac{A_i(x,y,t)}{A(x,y,t)}$ ersetzt. Dadurch wird also erreicht, daß die Kaufkrafttendenzen $K_i(x,y,t)$ durch die Shopping Valenzen $A_i(x,y,t)$ ersetzt werden und die so erhaltenen Shopping Valenz-Vektoren durch den Umrechnungsfaktor

$$(79) \qquad \frac{K(x,y,t)}{A(x,y,t)}$$

in das System der Kaufkrafttendenzen transformiert werden.

Die Festlegung des durch die Shopping Valenzen $A_i(x,y,t)$ bestimmten U_j-bezogenen Meßsystems $\beta^{(j)}_{(x,y,t)}$ verläuft wie oben aufgeführt. Es wird $\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}$ durch die drei Bedingungen

$$(i) \qquad \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), \hat{k}^{(j)}(x,y,t)) = 0$$

$$(ii) \qquad \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), \hat{v}^{(j)}(x,y,t)) = \left(\frac{A_j(x,y,t)}{A(x,y,t)} \cdot K(x,y,t)\right)^2$$

$$(iii) \qquad \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t), \hat{k}^{(j)}_{(x,y,t)}) = \left(K(x,y,t) - \frac{A_j(x,y,t)}{A(x,y,t)} \cdot K(x,y,t)\right)^2$$

definiert.

Zur Berechnung der Spannung in beliebigen Punkten (x,y,t) ist dann die Abbildung h nach Maßgabe der in Abschnitt 4.7. allgemein festgelegten Koeffizienten der Matrixdarstellung von h zu bestimmen. Man errechnet für

$$((1)) \qquad a_{11} = \frac{1}{K_j^2(x,y,t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), v^{(j)}(x,y,t)) =$$

$$= \frac{1}{K_j^2(x,y,t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}\left(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), \frac{K_j(x,y,t)}{\hat{K}_j(x,y,t)} \hat{K}_j(x,y,t) \cdot \langle (x^{(j)}, y^{(j)}, t) - (x,y,t) \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{K_j^2(x,y,t)} \cdot \frac{K_j(x,y,t)}{\hat{K}_j(x,y,t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{v}^{(j)}(x,y,t), v^{(j)}(x,y,t)) =$$

$$= \frac{1}{K_j(x,y,t)\, \hat{K}_j(x,y,t)} \cdot (\hat{K}_j(x,y,t))^2 =$$

$$= \frac{\hat{K}_j(x,y,t)}{K_j(x,y,t)} = \frac{A_j(x,y,t)}{A(x,y,t)} \cdot \frac{K(x,y,t)}{K_j(x,y,t)} .$$

Hierbei bezeichnet $\hat{K}_j(x, y, t)$ abkürzend in Einklang mit der Definition (77) die Größe $\frac{A_j(x, y, t)}{A(x, y, t)} \cdot K(x, y, t)$.

Führt man den verzerrten Wahrscheinlichkeitswert $\hat{p}_j(x, y, t) = \frac{A_j(x, y, t)}{A(x, y, t)}$ ein, so folgt:

$$\underline{\underline{a_{11} = \frac{\hat{p}_j(x, y, t)}{p_j(x, y, t)}}}$$

Weiter gilt:

((2)) $$a_{12} = \frac{1}{K_j^2(x, y, t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{v}^{(j)}(x, y, t),\ k^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$= \frac{1}{K_j^2(x, y, t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{v}^{(j)}(x, y, t),\ \hat{k}^{(j)}(x, y, t) + k^{(j)}(x, y, t) - \hat{k}^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$= \frac{1}{K_j^2(x, y, t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{v}^{(j)}(x, y, t), k^{(j)}(x, y, t) - \hat{k}^{(j)}(x, y, t)),$$

((3)) $$a_{21} = \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{k}^{(j)}(x, y, t), v^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$= \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \cdot \frac{K_j(x, y, t)}{\hat{K}_j(x, y, t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} \cdot (\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\ \hat{v}^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

und

((4)) $$a_{22} = \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \cdot \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{k}^{(j)}(x, y, t), k^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$= \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \cdot \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{k}^{(j)}(x, y, t), \hat{k}^{(j)}(x, y, t)) +$$

$$+ \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \cdot \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{k}^{(j)}(x, y, t), k(x, y, t) - \hat{k}^{(j)}(x, y, t)) =$$

$$= \frac{(K(x, y, t) - \hat{K}_j(x, y, t))^2}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} +$$

$$+ \frac{1}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2} \cdot \hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)} (\hat{k}^{(j)}(x,y,t), k(x, y, t) - \hat{k}^{(j)}(x,y,t)).$$

Wegen

$$\left(\frac{(K(x, y, t) - \hat{K}_j(x, y, t))}{K(x, y, t) - K_j(x, y, t)}\right)^2 = \left(\frac{1 - \hat{p}_j(x, y, t)}{1 - p_j(x, y, t)}\right)^2$$

erhält man

$$a_{22} = \left(\frac{1 - \hat{p}_j(x, y, t)}{1 - p_j(x, y, t)}\right)^2 + \frac{\hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{k}^{(j)}(x,y,t), k(x,y,t) - \hat{k}^{(j)}(x, y, t))}{(K(x, y, t) - K_j(x, y, t))^2}.$$

Wegen

$$\frac{\hat{p}_j(x, y, t)}{p_j(x, y, t)} - 1 = \frac{\hat{p}_j(x, y, t) - p_j(x, y, t)}{p_j(x, y, t)}$$

und

$$\frac{(1 - \hat{p}_j(x, y, t))^2}{(1 - p_j(x, y, t))^2} - 1 = \frac{(1 - \hat{p}_j(x, y, t))^2 - (1 - p_j(x, y, t))^2}{(1 - p_j(x, y, t))^2} =$$

$$= \frac{1 - 2\hat{p}_j(x, y, t) + \hat{p}_j(x, y, t)^2 - 1 + 2p_j(x, y, t) - p_j(x, y, t)^2}{(1 - p_j(x, y, t))^2} =$$

$$= \frac{2(p_j(x, y, t) - \hat{p}_j(x, y, t)) + \hat{p}_j(x, y, t)^2 - p_j(x, y, t)^2}{(1 - p_j(x, y, t))^2} =$$

$$= \frac{2(p_j(x,y,t) - \hat{p}_j(x,y,t)) + (\hat{p}_j(x,y,t) + p_j(x,y,t))\ (\hat{p}_j(x, y, t) - p_j(x, y, t))}{(1 - p_j(x, y, t))^2} =$$

$$= \frac{(\hat{p}_j(x, y, t) - p_j(x, y, t))\ (-2 + \hat{p}_j(x, y, t) + p_j(x, y, t))}{(1 - p_j(x, y, t))^2}$$

erhält man für die Matrixdarstellung der Verzerrung h - id die einzelnen Komponenten

$$a_{11} - 1 = \frac{\hat{p}_j(x, y, t) - p_j(x, y, t)}{p_j(x, y, t)}$$

$$a_{21} = 0$$

$$a_{12} = \frac{1}{K_j^2(x, y, t)} \hat{\beta}^{(j)}_{(x, y, t)} (\hat{v}^{(j)}(x, y, t), k^{(j)}(x, y, t) - \hat{k}^{(j)}(x, y, t))$$

$$a_{22} - 1 = \frac{(\hat{p}_j(x,y,t) - p_j(x,y,t))(\hat{p}_j(x,y,t) + p_j(x,y,t) - 2)}{(1 - p_j(x,y,t))^2} +$$

$$+ \frac{\hat{\beta}^{(j)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(j)}(x,y,t),\ k(x,y,t) - \hat{k}^{(j)}(x,y,t))}{(K(x,y,t) - K_j(x,y,t))^2}.$$

Die Einführung des Vektors $k^{(j)}_{(x,y,t)} - \hat{k}^{(j)}(x,y,t)$ ist sinnvoll, weil er die Abweichung des hypothetischen Achsenvektors $\hat{k}^{(j)}(x,y,t)$ von $k^{(j)}(x,y,t)$ kennzeichnet; so erklärt sich die Bedeutung der entsprechenden Terme in a_{12} und a_{22} von selbst.

Legt man nun die weiter oben behandelte Summennorm zugrunde, so erhält man als Maß für die Spannung

(80) $$|a_{11}-1| + |a_{22}-1| + |a_{12}|,$$

wobei sich diese Zahlen nach obigen Gleichungen bestimmen.

In folgendem Spezialfall ist die Rechnung verhältnismäßig einfach. Es wird n = 2 vorausgesetzt. Zur Abkürzung wird für das zu untersuchende Zentrum U_1, für das Konkurrenzzentrum U_2 gesetzt. Die Konkurrenz des Zentrums U_1 besteht aus U_2 und umgekehrt; folglich sind die einzelnen zentrumsbezogenen Interpretationen äquivalent. Entsprechend der vorangegangenen Betrachtung erhält man

$$a_{11} = \frac{\hat{p}_1(x,y,t)}{p_1(x,y,t)}$$

und $$a_{21} = 0.$$

Da im Falle n = 2 eine Verzerrung der Konkurrenzrichtung unmöglich ist, muß $k^{(1)}(x,y,t) = v^{(2)}(x,y,t)$ in die $\hat{k}^{(1)}(x,y,t) = \hat{v}^{(2)}(x,y,t)$-Richtung fallen; folglich ist $k^{(1)}(x,y,t) - \hat{k}^{(1)}(x,y,t)$ bzgl. $\hat{\beta}^{(1)}_{(x,y,t)}$ zu $\hat{v}^{(1)}(x,y,t)$ orthogonal. Dies impliziert $a_{12} = 0$. Zur Bestimmung von a_{22} beschreitet man besser nicht den oben angegebenen Weg, sondern geht wie zur Berechnung von a_{11} vor. Dazu muß die Identität

$$k^{(1)}(x,y,t) = v^{(2)}(x,y,t) = \frac{K_2(x,y,t)}{\hat{K}_2(x,y,t)}\hat{K}_2(x,y,t)\cdot\langle(x^{(2)},y^{(2)},t)-(x,y,t)\rangle =$$

$$= \frac{K_2(x,y,t)}{\hat{K}_2(x,y,t)}\cdot\hat{v}^{(2)}(x,y,t) = \frac{K_2(x,y,t)}{\hat{K}_2(x,y,t)}\cdot\hat{k}^{(1)}(x,y,t)$$

beachtet werden; sie liefert:

$$a_{22} = \frac{1}{(K(x,y,t)-K_1(x,y,t))^2}\cdot\hat{\beta}^{(1)}_{(x,y,t)}\cdot(\hat{k}^{(1)}(x,y,t),\ k^{(1)}(x,y,t)) =$$

$$= \frac{1}{(K_2(x,y,t))^2}\cdot\frac{K_2(x,y,t)}{\hat{K}_2(x,y,t)}\cdot\hat{\beta}^{(1)}_{(x,y,t)}(\hat{k}^{(1)}(x,y,t),\ \hat{k}^{(1)}(x,y,t)) =$$

$$= \frac{1}{K_2(x,y,t)\cdot\hat{K}_2(x,y,t)}\cdot\left(K(x,y,t) - \frac{A_1(x,y,t)}{A(x,y,t)}\cdot K(x,y,t)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{K_2(x,y,t)\cdot\hat{K}_2(x,y,t)}\cdot\hat{K}_2(x,y,t)^2 = \frac{\hat{K}_2(x,y,t)}{K_2(x,y,t)} = \frac{\hat{p}_2(x,y,t)}{p_2(x,y,t)}.$$

Diejenige Matrix, die die Abbildung h bezüglich der Basis $v^{(1)}(x,y,t)$, $k^{(1)}(x,y,t)$ beschreibt, wird also durch

(81) $$\begin{pmatrix} \frac{\hat{K}_1(x,y,t)}{K_1(x,y,t)} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{K}_2(x,y,t)}{K_2(x,y,t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}_1(x,y,t)}{p_1(x,y,t)} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{p}_2(x,y,t)}{p_2(x,y,t)} \end{pmatrix}$$

gegeben. In diesem Fall ist also

(82) $$\left|\frac{\hat{p}_1(x,y,t)}{p_1(x,y,t)} - 1\right| + \left|\frac{\hat{p}_2(x,y,t)}{p_2(x,y,t)} - 1\right|$$

als Maß für die Spannung anzusehen.

Zu erwähnen ist noch, daß im Falle zweier Zentren die Zentrums-orientierten Messungen recht einfach zu handhaben sind: die Länge des Konkurrenzvektors $k^{(1)}(x,y,t) = v^{(2)}(x,y,t)$ wird durch $K(x,y,t)-K_1(x,y,t) = K_2(x,y,t)$ gegeben; folglich führt man längs der Konkurrenzachse ebenfalls eine euklidische Messung durch.

4.9. Schwerpunktbildungen

Bei Anwendung des Modells auf konkrete Marktregionen kann folgendes Problem entstehen: Die Verläufe der Modellgrößen sind kontinuierlich, obwohl im allgemeinen nur empirische Informationen in Form diskreter Verteilungen erhältlich sind.

Werden allerdings - und das war ein wesentliches Motiv für die Entwicklung dieses Modells - Trendextrapolationen, Lebenszykluskonzepte usw., wie sie beispielsweise in der Prognoseforschung üblich sind, angewandt, so ist doch wieder von kontinuierlichen Funktionsverläufen auszugehen.

Es sollen hier aber noch einige Überlegungen für den Fall angeführt werden, daß nur wenige punkthafte Informationen vorliegen und die Anwendung des oben entwickelten Modells geplant ist.

Im Hinblick auf die geographischen Zustände ist hierbei folgendes Vorgehen naheliegend: die geographische Region G wird bei einem festen Zeitpunkt $t \in Z$ in eine Reihe von Teilregionen zerfallen, die sich aufgrund des Zusammenspiels der verschiedenen sozio-ökonomischen Erscheinungen in natürlicher Weise bilden. Eine derartige Teilregion wird nun im diskreten Fall durch einen "Schwerpunkt" repräsentiert. Hiermit ist ein Punkt gemeint, dem verschiedene sozio-ökonomische Größen so zugeschrieben werden können, daß das entstehende diskrete Gebilde gleiches Verhalten wie das zugrundegelegte kontinuierliche aufweist.

Auch ohne eingehende Untersuchung der Repräsentation charakteristischer Eigenschaften der verschiedenen Felder durch Schwerpunkte ist es sinnvoll, daß für gewisse elementare Größen der Mittelwert über empirisch bestimmte Teilregionen als der mit dem Schwerpunkt assoziierte Wert angesehen wird. Bei einigen Fällen ist der Schwerpunkt auch überflüssig; man versucht vielmehr, die Parameter des Schwerpunktes auf die kontinuierlichen Verläufe zu übertragen, um so die punktualen Überlegungen mit den globalen zu identifizieren.

Als Beispiel sei der Fall der Kaufkraft angegeben. Auf eine Teilregion TR des geographischen Gebietes G wird die Kaufkraft durch eine Funktion

$$(x, y) \rightarrow K(x, y, t)$$

gegeben - die Zeit wurde festgehalten. Die Bewertung der gesamten Teilregion wird zum gleichen Ergebnis führen, wenn man an Stelle der gesamten Funktion die konstante Funktion

$$(x, y) \rightarrow \frac{1}{\text{Fläche von TR}} \cdot \int_{TR} K(x, y, t)\, dF \tag{83}$$

verwendet. Das Integral $\int_{TR} K(x, y, t)\, dF$ gibt dabei die gesamte Kaufkraft der Teilregion TR zur Zeit t an; nach Division dieser Größe durch die Fläche der Teilregion TR erhält man den repräsentativen, gemittelten, punktualen Wert.

Entsprechend wird man bei der Bestimmung der Spannung in einem Punkt der Teilregion den exakten Wert $A(x, y, t)$ durch

$$\frac{1}{\text{Fläche von TR}} \cdot \int_{TR} A(x, y, t)\, dF$$

ersetzen. Die mit Hilfe dieser Größen gewonnenen Wahrscheinlichkeitswerte $p(x, y, t)$ und $\hat{p}(x, y, t)$ sind dann zur Bestimmung der Spannung ausschlaggebend. Dies bedeutet, daß man bei Bestimmung des Spannungs-

wertes nicht direkt vorgeht, sondern gemittelte Größen heranzieht. Dies führt im allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Die weiter oben vorausgesetzte lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung. Eine punktuale Theorie kann zwar nicht in jedem Punkt des Marktraumes Anwendung finden, doch spielt die Ausnahmemenge keine wesentliche Rolle; denn nur zwei einfache Fälle können eintreten: Entweder verschwindet einer der beiden Vektoren $v^{(j)}(x, y, t)$ bzw. $k^{(j)}(x, y, t)$ auf einer ganzen Teilregion TR, d.h. entweder besitzt die Konkurrenz des Zentrums U_j bzw. das Zentrum U_j selbst eine Monopolstellung in der Teilregion, oder aber diejenigen Punkte, in denen $v^{(j)}(x, y, t)$ und $k^{(j)}(x, y, t)$ linear abhängig sind, liegen so "dünn" in der Teilregion TR, daß sie bei der Integration unwesentlich sind. In beiden Fällen ist es sicher, daß beim Übergang zur Schwerpunktbetrachtung durch die Ausnahmemenge keine Mehrdeutigkeiten entstehen können.

Bei allgemeinen Situationen wird man nicht immer so einfach vorgehen können. Dies wird bereits deutlich, wenn man "echte" Zentrums-orientierte Bewertungen zugrundelegt, was offensichtlich schon für drei Zentren der Fall ist. Hierbei wird man die möglichen Zentrumsorientierungen verbinden müssen und durch geeignetes Vorgehen eine gesamte Spannung einer Teilregion, die ja etliche Zentren vereinen kann, ermitteln müssen. Dann werden die angeführten Mittlungsprozesse durch Integration nicht mehr ausreichend sein.

Für den einfachen Fall einer bizentrischen Region reicht es zur Bestimmung der Spannungsverhältnisse jedoch aus, Mittelwerte arithmetisch festzustellen, d.h. im kontinuierlichen Fall durch Integration über eine Teilregion TR und anschließende Division durch die Fläche der Teilregion.

5. Schlußbemerkungen

Mit diesem Modell können künftig auch in der ökonomischen Theorie gewisse raum-zeitliche Erscheinungen mit Feldern beschrieben werden.

Für weitere Forschung in der aufgezeigten Richtung sollte noch ausführlicher auf die inneren Eigenschaften dieser Felder und ihrer funktionalen Zusammenhänge eingegangen werden. Diese Eigenschaften werden mathematisch durch Begriffe wie z.B. "Potential", "Divergenz", "Rotation" oder "Gradient" charakterisiert. Es ging aber zunächst darum, den theoretischen Hintergrund für die Grundstruktur eines feldtheoretischen Regionalmodells aufzuzeigen.